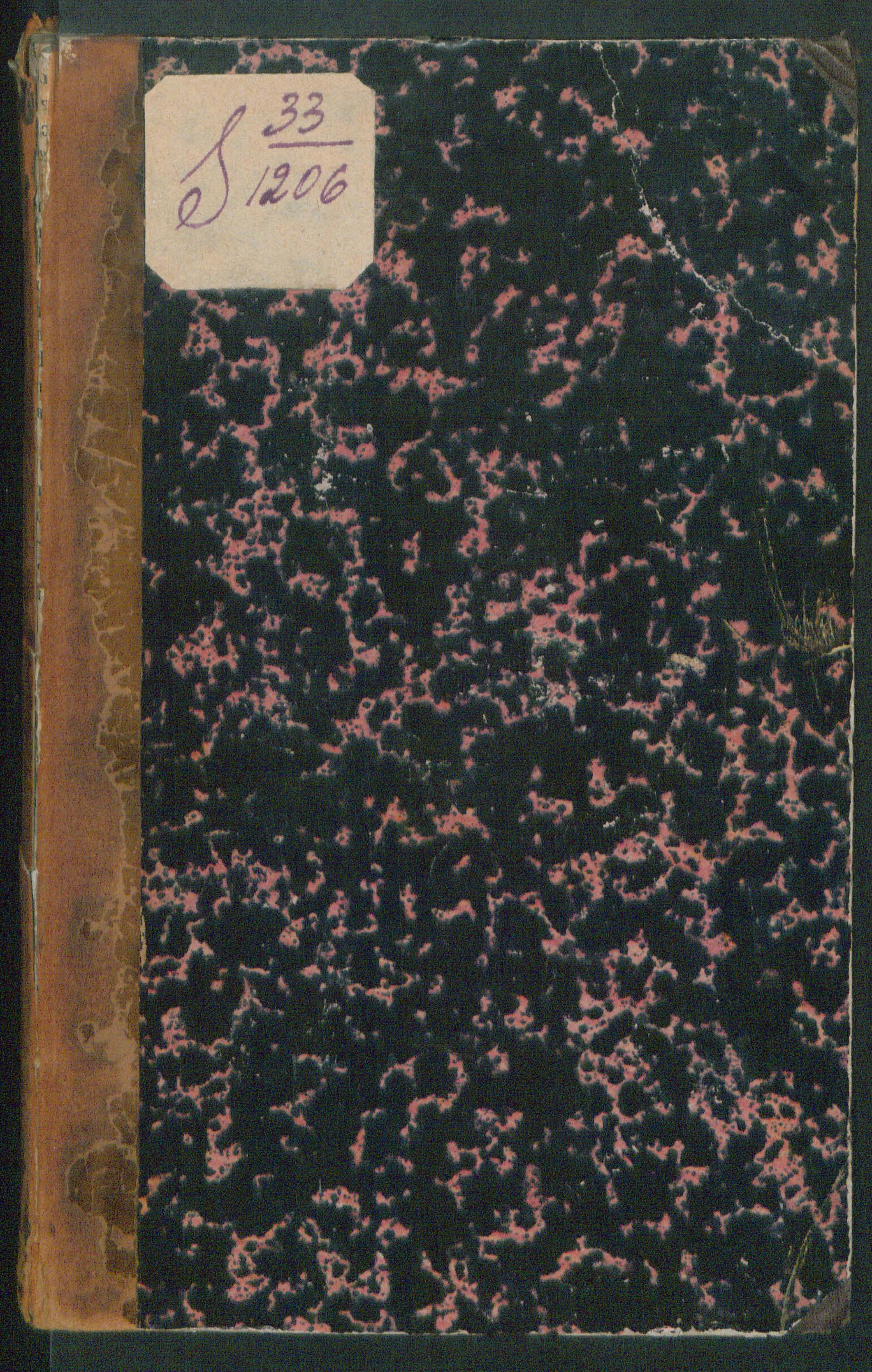
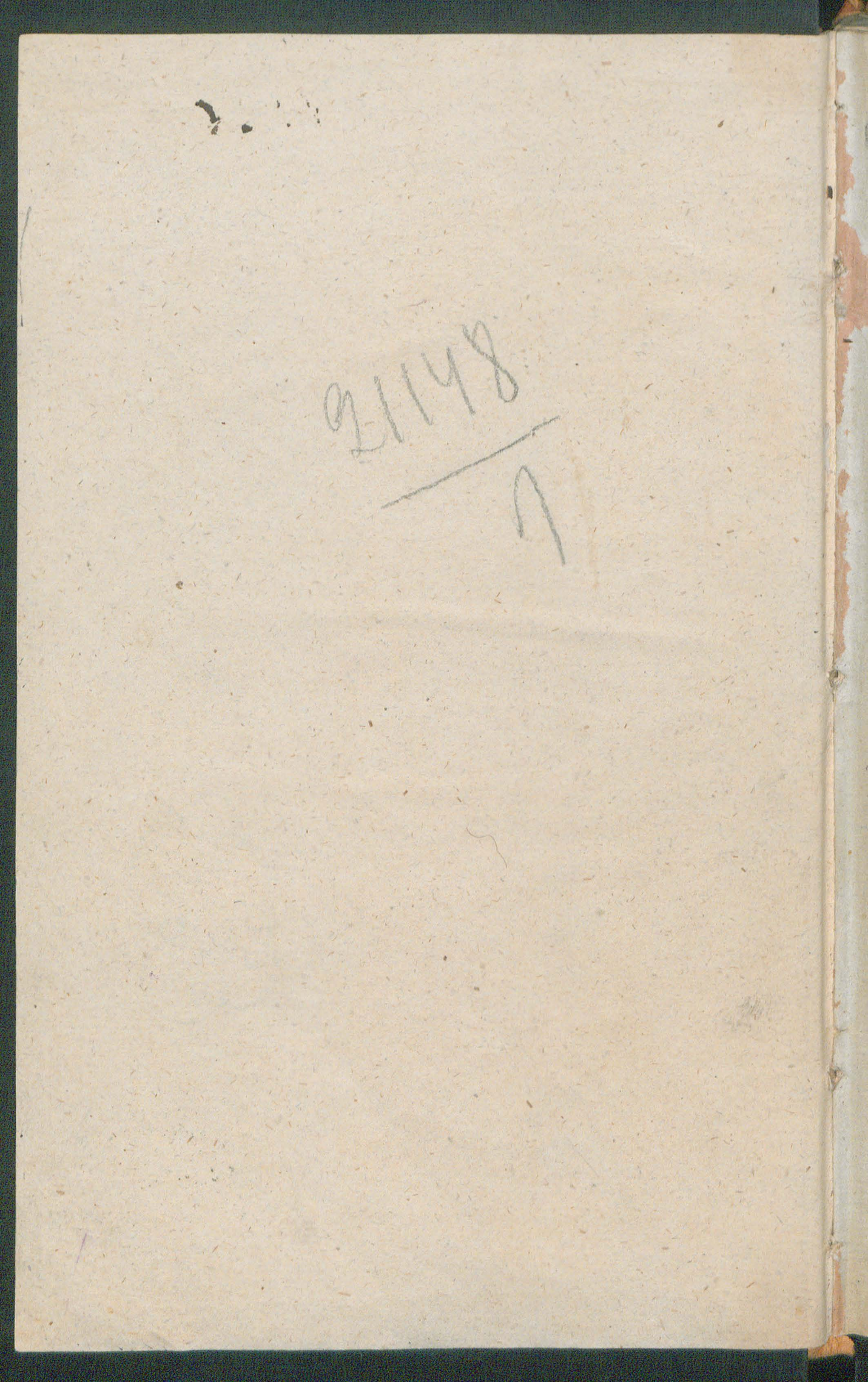

S 33/1206



1 вип. стр. все 14/2-87


21148

АРХИМЕДА ПСАММИТЪ,

или

ИЗЧИСЛЕНІЕ ПЕСКУ

въ пространствѣ равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ.

Переводъ съ Греческаго

Ѳ. ПЕТРУШЕВСКАГО.

Съ Примѣчаніями, и съ присовокупленіемъ

ОБЩЕЙ ѲЕОРІИ

величинъ пропорціональныхъ

Древнихъ Геометровъ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ,

въ Типографіи Департамента Народнаго Просвѣщенія.

1824.



ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЕНО

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска изъ типографіи, представлены были въ С. Петербургскій Цензурный Комитетъ *семь* екземпляровъ сей книги, для препровожденія, куда слѣдуетъ, на основаніи узаконеній. С. Петербургъ. Ноября 17 дня 1823 года.

Цензоръ, Александръ Бируковъ.



ЕГО ВЫСОКОПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВУ

ГОСПОДИНУ

ДѢЙСТВИТЕЛЬНОМУ ТАЙНОМУ СОВѢТНИКУ, СЕНАТОРУ И ОРДЕНОВЪ: СВ. АЛЕКСАНДРА НЕВСКАГО И СВ. ВЛАДИМІРА I СТЕПЕНИ КАВАЛЕРУ

НИКОЛАЮ НИКОЛАЕВИЧУ

НОВОСИЛЬЦОВУ.



Въ знакъ глубочайшаго почитанія
и совершенной преданности
посвящаетъ

Ѳ. Петрушевскій.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Псаммитъ или Аренарій (1) есть не что иное, какъ письмо къ Гелону сыну и наслѣднику (2) Іерона Царя Сиракузкаго, написанное въ опроверженіе мнѣнія тѣхъ, которые думаютъ, будто нельзя изчислить песку, покрывающаго всѣ страны земнаго шара. Архимедъ, разпространивъ сей вопросъ несравнено далѣе, то есть перейдя отъ него къ количеству песка равному всей землѣ, потомъ всему, называемому имъ міру, и на-

(1) Отъ *ψάμμος*, arena, что значитъ песокъ.

(2) Нѣкоторые называютъ Гелона Царемъ Сиракузскимъ, вѣроятно основываясь на самомъ Псаммитѣ, которой начинаетсѣ такъ: *Οιονται τινεὶς, Βασιλεῦ Γέλων*, и проч. Но здѣсь *Βασιλεῦ* есть нечто иное какъ титулъ, приписываемый наслѣднику Самодержавнаго Государя. И дѣйствительно Гелонъ не былъ Царемъ, ибо онъ, какъ извѣстно, умеръ прежде своего родителя.

конецъ небесному шару или неподвижныхъ звѣздъ, не только показываетъ возможность изчислить количество песку даже въ семъ послѣднемъ, но и доказываетъ, что число песчинокъ, въ немъ содержащихся, будетъ меньше тысячи миріадъ чиселъ восьмыхъ, то есть меньше числа, которое по нашему счисленію изобразится, когда къ единицѣ припишемъ съ правой стороны шестьдесятъ три нуля. Сіе небольшое сочиненіе, сколько любопытно по своему содержанію, столько и важно, какъ по образу изложенія, такъ и по нѣкоторымъ предмѣтамъ, относящимся къ Астрономіи. Здѣсь между прочимъ можно видѣть, что уже древними окружность земнаго шара измѣрена была съ довольною точностію, что имъ было извѣстно движеніе ея, одно изъ важнѣйшихъ новыхъ открытій, и что они почти одинаково съ нами думали объ ужасномъ разстояніи неподвижныхъ звѣздъ.

Я не буду останавливаться на различіи понятій ихъ о величинѣ и разстояніяхъ земли, солнца и звѣднаго неба, какъ о такомъ предметѣ, который въ Псаммитѣ не самый важный, тѣмъ болѣе, что Архимедъ, для избѣжанія возраженій, увеличилъ все до такой степени, что даже и при изчисленіи песчинокъ въ звѣздномъ шарѣ (ж), основываясь на извѣстныхъ нынѣ величинахъ небесныхъ тѣлъ и разстояніяхъ ихъ, найденное имъ число будетъ слишкомъ достаточно. Замѣчу только для читателей, коимъ главныя основанія Астрономіи не извѣстны, что шаръ неподвижныхъ звѣздъ есть только кажущійся, дѣйствительно же сіи свѣтила, по вѣроятнѣйшему обще принятому между Астрономами мнѣнію, не суть въ

(ж) То есть въ такомъ, коего радіусъ равенъ разстоянію солнца до ближайшей неподвижной звѣзды, хотя бы параллаксъ ея положить въ 1''.

равномъ разстояніи отъ земли или солнца; что о разстояніи семъ мы имѣемъ точное понятіе токмо отрицательное, а именно: знаемъ только, что ближайшая неподвижная звѣзда отъ солнца далѣе, нежели на 100,000 радіусовъ міра; касательно же самыхъ дальнѣйшихъ, то предъ ихъ разстояніемъ изчезаетъ всякое измѣреніе или изчисленіе, и даже самое воображеніе теряется во глубинѣ небесъ, такъ что предѣлы вселенной безъ сомнѣнія навсегда останутся извѣстными токмо Единому ея Создателю.

~~~~~~~~

Скажемъ еще нѣчто о древней Өеоріи пропорцій, которую можетъ быть слѣдовало издать прежде Эвклида а особливо Архимеда. Излишне было бы распространяться о пользѣ и важности ея предмѣта. Тѣмъ, кои читали или покушались читать древнихъ Геометровъ, извѣстно, что она есть ключь къ уразумѣнію ихъ твореній, и содержитъ въ себѣ столько ис-
~~~~~~~~

тинн, нынѣ забытыхъ или оставленныхъ, что безъ знанія оныхъ даже самый искусный въ нынѣшней Аналитикѣ едва ли можетъ понимать самыя простыя предложенія древнихъ, каковы, на примѣръ, Архимеда въ Книгахъ о шарѣ и цилиндрѣ. Впрочемъ сія трудность зависитъ не столько отъ сущности предмѣта, сколько отъ образа изложенія онаго (чрезъ посредство линій), а наипаче отъ того, что полнаго систематическаго сочиненія о пропорціяхъ величинъ до насъ не дошло, кромѣ V книги Началъ, содержащей однакожъ токмо 25 главныхъ предложеній. Цѣль изданія настоящей Ѳеоріи состоитъ въ томъ, дабы по возможности удалить сіи препятствія. Для сего къ 25 помянутымъ предложеніямъ присовокуплены изъ твореній древнихъ еще 20 (*); тѣ

(*) Большая часть изъ нихъ помѣщены уже были въ примѣчаніяхъ къ книгамъ: *Эвклидовыхъ началъ*

изъ нихъ, коихъ доказательствъ ни гдѣ найти не можно было, доказаны вновь изъ тѣхъ же оснований, какія предположилъ Эвклидъ; и всей вообще ѳеоріи данъ видъ алгебраическій, чрезъ приложеніе къ ней знакоположенія, нынѣ употребляемаго. Можно бы еще болѣе всѣ ея правила сблизить съ принятыми нынѣ въ Маѳематикѣ, перемѣнивъ выраженіе предложеній и предположивъ величины изображенныя числами: но первое препятствовало бы къ достиженію главной цѣли, то есть къ уразумѣнію древнихъ, а второе уничтожило бы важнѣйшее достоинство Ѳеоріи, то есть ея всеобщность.

восемъ книгъ, содержащія Основанія Геометріи 1819 и *Архимеда двѣ Книги о шарѣ и цилиндрѣ, Измѣреніе круга и Леммы* 1823. Но доказательства оныхъ произведены чрезъ посредство линій.

АРХИМЕДА ПСАММИТЪ.

Государь!

Есть люди, которые думаютъ, что число песчинокъ безконечно. Я не говорю о пескѣ, находящемся около Сиракузъ и въ прочихъ мѣстахъ Сициліи, но о всемъ онаго количествѣ въ странахъ какъ обитаемыхъ, такъ и не обитаемыхъ. Другіе же полагаютъ, что хотя таковое число и не безконечно, но что бо́льшаго, нежели оно, невозможно выразить. Естьлибъ тѣ, кои думаютъ такимъ образомъ, вообразили себѣ громаду песку, равную массѣ цѣлой земли, такъ чтобъ онымъ наполнены были всѣ ея пропасти и глубина морская, даже

до вершинъ высочайшихъ горъ; то конечно они еще менѣе повѣрили бы, что легко назвать число и сего большее. Напротивъ того, я постараюсь доказать съ геометрическою точностію, которою, Государь, Вы убѣдитесь, что между числами изображенными мною въ книгахъ, приписанныхъ Зевксиппу (1), есть такія, которыя больше числа песчинокъ, вмѣщающихся въ пространствѣ равномъ величинѣ не только земли, сказаннымъ образомъ наполненной, но и цѣлаго міра.

Вамъ извѣстно, Государь, что міромъ многіе Астрономы называютъ шаръ, коего центръ тотъ же что и земли, а радіусъ равенъ прямой, соединяющей центръ земли съ центромъ солнца. Но Аристархъ Самоскій, опровергая сіе мнѣніе въ написанныхъ имъ противъ Астрономовъ Предложеніяхъ, выводитъ изъ нихъ, что міръ гораздо больше, нежели теперь сказано. Онъ полагаетъ, что неподвижныя звѣзды и солнце не перемѣняютъ мѣста, что земля вращается по окружности круга около солнца, которое стоитъ въ срединѣ

орбиты ея, и что шаръ неподвижныхъ звѣздъ, имѣющій одинъ и тотъ же центръ съ солнцемъ, есть таковъ, что окружность круга, описываемая, по его предположенію, землею, имѣетъ къ разстоянію неподвижныхъ звѣздъ тоже отношеніе, какое центръ шара къ поверхности онаго. Но явно, что сіе не возможно: ибо какъ центръ шара не имѣетъ никакой величины, то и нельзя допустить, чтобы онъ имѣлъ какое либо отношеніе къ поверхности шара*(*a*). Надобно думать, что *оп. 4. г. Аристархъ разумѣлъ слѣдующее: Ежели принять землю какъ бы за центръ міра, то какое отношеніе имѣетъ земля къ помянутому шару міра, тоже имѣетъ и шаръ, коего кругъ предполагается описаннымъ движеніемъ земли, къ шару неподвижныхъ звѣздъ (2). Потому что онъ доказательства свои выводитъ изъ предположенія сихъ явленій; наипаче же потому, что

(*a*) Знакъ (*) показываетъ ссылку на Эвклидовы Начала, изд. 1819 г.; а знакъ (†) на Архимедовы Творенія, изд. 1823 г.

шаръ, въ коемъ полагаетъ землю движущеюся, онъ, какъ кажется, считаетъ равнымъ шару, который мы назвали міромъ.

Итакъ я скажу, что естьли бы былъ шаръ песку, каковъ Аристархомъ предполагается шаръ неподвижныхъ звѣздъ, то можно доказать, что между числами наименованными въ книгѣ Началъ, есть такія, кои больше числа песчинокъ содержащихся въ таковомъ шарѣ. А именно, предполагая слѣдующее: вопервыхъ, что окружность земли имѣетъ около трехъ сотъ миріадъ (3) стадій (4), но не болѣе: ибо нѣкоторые старались доказать, какъ не безъизвѣстно Вамъ, Государь, что она имѣетъ около тридцати миріадъ стадій: но я преступаю гораздо далѣе и полагаю оную въ десять разъ большею, то есть въ триста миріадъ (5), но не болѣе. Потомъ, что поперечникъ земли больше поперечника луны, а поперечникъ солнца больше поперечника земли: все сіе принимаю, основываясь на большей части вышепомянутыхъ Астрономовъ. И еще, что поперечникъ солнца почти тридцатикратный

поперечника луны, но не болѣе (6). Ибо изъ сказанныхъ Астрономовъ Эвдоксій утверждаетъ, что оный почти девятикратный; Фидій, сынъ Акупатра, говоритъ что двѣнадцатикратный; и наконецъ Аристархъ старается доказать, что оный больше нежели восмнадцатикратный, а меньше нежели двадцатикратный: но я, дабы удалить всякое возраженіе противу доказательства моего предложенія, переступаю далѣе и полагаю, что поперечникъ солнца почти тридцатикратный поперечника луны, но не болѣе. Притомъ, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника вписаннаго въ наибольшемъ кругѣ міра; и сіе полагаю основываясь на мнѣніи Аристарха, который утверждаетъ, что видимая величина солнца есть семьсотъдвадцатая часть его орбиты (7), называемой Зодіакомъ. Я старался и собственнымъ наблюденіемъ взять помощію особеннаго прибора уголъ солнца, имѣющій вершину въ глазѣ, хотя сіе учинить съ успѣхомъ весьма не легко: ибо ни глаза, ни руки, ни инструменты, при

семъ употребляемые, недостаточны для измѣренія съ совершенною точностію. Впрочемъ, здѣсь не нужно разпространяться о семъ, какъ о такомъ предметѣ, о которомъ много уже говорено было, тѣмъ паче, что вразсужденіи доказательства моего предложенія, достаточно будетъ взять одинъ уголъ, который былъ бы не больше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину свою въ глазѣ наблюдателя, а другой, который былъ бы не меньше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ центрѣ же глаза.

Для сего, положивъ длинную линѣйку на плоскости, помѣщенной въ такомъ мѣстѣ, изъ котораго можно видѣть возходящее солнце, я тотчасъ по возхожденіи онаго, поставилъ на линѣйку отвѣсно маленькій цилиндръ, и коль скоро солнце показалось на горизонтѣ и слѣдовательно еще можно было на него смотрѣть (8), направилъ линѣйку прямо къ солнцу, помѣстивъ на концѣ ея глазъ, а между глазомъ и солнцемъ, цилиндръ такъ, чтобы онымъ солнце совсѣмъ закрывалось:

потомъ сталъ отодвигать отъ глаза цилиндръ до тѣхъ поръ, пока едва только начало по обѣимъ его сторонамъ показываться солнце, и тутъ же остановилъ оный. Естьли бы глазъ видѣлъ солнце не болѣе какъ одною точкою, то, проведя отъ конца линѣйки, при коемъ онъ помѣщенъ былъ прямыя касательныя къ цилиндру, уголъ содержимый сими прямыми былъ бы меньше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ; потому что отъ солнца нѣчто видимо было по обѣимъ сторонамъ цилиндра: но поелику глазъ усматриваетъ предмѣты не одною точкою, а частію своею, имѣющею нѣкоторую величину, то я взялъ еще цилиндрикъ, (9) коего поперечникъ не меньше ширины зрачка, поставилъ оный на краю линѣйки, при коемъ помѣщенъ глазъ, и проведя къ сему и къ прежнему цилиндру, двѣ касательныя, получилъ между оными уголъ, который меньше угла объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ. Цилиндрикъ же, который былъ бы въ поперечникѣ не меньше ширины зрач-

ка, находится слѣдующимъ образомъ. Берутся два тонкіе и одинакой величины цилиндрика, одинъ бѣлый а другой не бѣлый, и помѣщаются передъ глазомъ такъ, чтобы бѣлый былъ дальше отъ него, а не бѣлый сколько возможно ближе, то есть чтобы касался къ самому лицу. Ежели взятые цилиндрики будутъ тонѣе ширины зрачка, то глазъ, объемля цилиндрикъ, помѣщенный возлѣ лица, увидитъ другой, то есть бѣлый, и притомъ весь, когда будетъ многимъ тонѣе, а когда не многимъ, то нѣкоторыя токмо его части, по обѣимъ сторонамъ ближайшаго. Слѣдовательно, естьли взять и расположить сказаннымъ образомъ два цилиндрика такой толщины, чтобы по оной одинъ закрывалъ другой, не закрывая однакожъ бóльшаго пространства, то поперечникъ или толщина каждаго изъ таковыхъ цилиндриковъ, будетъ нѣкоторымъ образомъ не меньше ширины зрачка.

Дабы взять уголъ, который былъ бы не меньше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ, я началъ отъ

глаза отодвигать мало по малу цилиндръ, пока онъ закрылъ солнце, и потомъ отъ конца линѣйки, при коемъ находился глазъ, провелъ касательныя къ цилиндру: чрезъ что и составился между сихъ прямыхъ уголъ, который не меньше угла объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ.

Взявъ такимъ образомъ сіи углы, и измѣривъ оные прямымъ угломъ, я нашелъ, что большій изъ нихъ, который былъ при замѣткѣ линѣйки, меньше нежели одна часть прямаго угла раздѣленнаго на 164, а меньшій, больше нежели одна часть прямаго же раздѣленнаго на 200 равныхъ частей. Изъ сего явствуетъ, что уголъ объемлющій солнце и имѣющій вершину въ глазѣ, есть меньше $\frac{1}{164}$ а больше $\frac{1}{200}$ прямаго угла. (10).

Послѣ сего, докажется уже, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника вписаннаго въ наибольшемъ кругѣ міра. Вообразимъ плоскость, проведенную чрезъ центръ земли, центръ солнца и глазъ наблюдателя, когда солнце не много выше горизонта; и пусть оная пресѣкаетъ

міръ по кругу ABC, землю по кругу DEF; а солнце по кругу SG; и пусть будетъ центръ земли въ H, солнца въ K, а глазъ въ D. Проведемъ касательныя къ кругу SG, отъ D прямыя DL, DO, прикасающіяся къ нему въ N и въ T, и отъ H прямыя HM, HP, прикасающіяся въ R и въ X; и пусть прямыя HM, HP пресѣкаютъ кругъ
19, I. ABC въ A и B. Итакъ HK больше DK, ибо полагается, что солнце на горизонтѣ (11): посему уголъ содержимый въ DL, DO больше угла содержимаго въ HM, HP (12). Но уголъ содержимый въ DL, DO больше нежели $\frac{1}{200}$ прямаго, а меньше нежели $\frac{1}{164}$ онаго, ибо сей уголъ равенъ тому, который объемлетъ солнце, имѣя вершину въ глазѣ: посему уголъ содержимый въ HM, HP, будетъ меньше нежели $\frac{1}{164}$ прямаго; а посему прямая AB меньше прямой, стягивающей дугу круга ABC, раздѣленнаго на 656 частей.

Но очертаніе сказаннаго многоугольника къ радіусу круга ABC имѣетъ меньшее отношеніе нежели 44 къ 7, потому что очертаніе всякаго многоугольника въ кругѣ

вписаннаго къ радіусу имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 44 къ 7 (13). Ибо, доказано мною, какъ небезъизвѣстно Вамъ, Государь, что окружность всякаго круга больше трикратнаго поперечника избыткомъ, который меньше нежели $\frac{1}{7}$ а больше $\frac{10}{71}$ поперечника†. Посему BA къ HK имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 11 къ 1148 (14): а посему BA меньше нежели $\frac{1}{100}$ прямой HK. Но прямой BA равенъ поперечникъ круга SG, ибо половина ея, прямая VA, равна KR, по равенству прямыхъ HK, HA, отъ концовъ коихъ проведены перпендикуляры, противулежащіе томуже углу*: посему явно, что поперечникъ круга SG есть меньше нежели $\frac{1}{100}$ прямой HK. А поперечникъ EHU меньше поперечника круга SG, ибо кругъ DEF меньше круга SG: посему HU, KS меньше $\frac{1}{100}$ прямой HK. Чего ради HK къ US имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 100 къ 99 (15). Но HK не меньше HR, а SU меньше DT: посему HR къ DT имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 100 къ 99 (16). И поелику прямоугольныхъ треугольниковъ HKR, DKT стороны KR,

† 3, Изм. Кр.

* 26, I.

КТ равны, а стороны HR, DT неравны, и HR большая: то уголъ содержимый въ DT, DK къ углу содержимому въ HR, HK имѣетъ большее отношеніе, нежели HK къ DK, а меньшее нежели HR къ DT. Ибо, ежели двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ стороны, кои около прямаго угла, однѣ равны, а другія неравны: то изъ угловъ, прилежащихъ неравнымъ сторонамъ, большій къ меньшему имѣетъ большее отношеніе, нежели изъ сторонъ, противулежащихъ прямому углу, большая къ меньшей, а меньшее, нежели изъ тѣхъ, кои около прямаго угла, большая къ меньшей (17). Слѣдовательно уголъ содержимый въ DL, DO къ углу содержимому въ HP, HM имѣетъ меньшее отношеніе, нежели HR къ DF. Сіи же имѣютъ меньшее нежели 100 къ 99: посему уголъ содержимый въ DL, DO къ углу содержимому въ HP, HM имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 100 къ 99 (18). И поелику уголъ содержимый въ DL, DO больше двухъсотой части прямаго, то содержимый въ HM, HP будетъ больше нежели 99 двумиріадныхъ

частей, и слѣдовательно больше одной двѣститретьей части прямаго (19). Посему ВА больше прямой стягивающей дугу круга АВС раздѣленнаго на 812 частей. Но поперечникъ солнца равенъ АВ: итакъ явно, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника.

Предположивъ сіе, докажемъ еще, что поперечникъ міра меньше миріадократнаго поперечника земли; и что поперечникъ міра меньше нежели миріада миріадъ разъ 100 стадій. И дѣйствительно, поелику положено, что поперечникъ солнца не больше, нежели тридцатикратный поперечника луны, а поперечникъ земли больше поперечника луны; то явно, что поперечникъ солнца меньше нежели тридцатикратный поперечника земли. Еще же, поелику доказано, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника вписаннаго въ наибольшемъ кругѣ міра: посему явно, что очертаніе сказаннаго тысячеугольника меньше нежели тысячекратное поперечника солнца. Но поперечникъ солнца меньше нежели тридцатикратный по-

перечника земли: слѣдственно очертаніе тысячеугольника меньше нежели тримиріадократное поперечника земли. Итакъ, поелику очертаніе сего тысячеугольника есть меньше нежели тримиріадократное поперечника земли, а больше нежели трикратное поперечника міра, ибо доказано, что поперечникъ всякаго круга меньше нежели третья часть очертанія всякаго вписаннаго въ томъ кругѣ многоугольника, имѣющаго стороны равныя, и числомъ
† въ 3, Из. К. больше шести†: посему поперечникъ міра, есть меньше нежели миріадократный поперечника земли. (20) А что поперечникъ міра, который меньше нежели миріадократный поперечника земли, будетъ меньше нежели миріада миріадъ разъ 100 стадій, явствуетъ изъ слѣдующаго: Поелику полагается окружность земли не больше трехъ сотъ миріадъ стадій; окружность же земли есть больше нежели трикратная поперечника ея, ибо окружность всякаго круга больше нежели трикратная своего поперечника; посему явно, что поперечникъ, земли меньше ста миріадъ стадій:

а какъ поперечникъ міра меньше нежели миріадократный поперечника земли; слѣдственно явствуетъ, что поперечникъ міра меньше ста миріадъ миріадъ стадій. Таковы суть предположенія о величинахъ и разстояніяхъ.

Вразсужденіи же песку я предполагаю: во первыхъ, что ежели взять количество песку небольше маковаго зерна, то число содержащихся въ немъ песчинокъ будетъ не больше миріады. Во вторыхъ, что поперечникъ сего зерна не меньше сороковой части дюйма (21). Послѣднее полагаю основываясь на слѣдующемъ опытѣ: я положилъ на маленькой линѣйкѣ маковыя зерна впрямъ, такъ, чтобы онѣ взаимно касались, и нашелъ, что двадцать пять зеренъ занимали въ длину больше дюйма. Но я полагаю маковое зерно, и того меньше, именно, что оно въ поперечникѣ только не меньше сороковой части дюйма: дабы и въ семъ обстоятельствѣ не могло быть никакого прекословія противъ того, что буду доказывать. И вотъ мои всѣ предположенія.

Сверхъ всего этого, я почитаю за по-

лезное изложить здѣсь номенклатуру чисель, ибо опасаюсь, когда ничего о семъ не скажу, дабы тѣ, коимъ не случалось читать книги, приписанной мною Зевксиппу, не впали въ заблужденіе.

Числа, кои идутъ до миріадъ, имѣютъ извѣстныя названія, равно какъ и тѣ, кои идутъ далѣе, до миріады миріадъ; ибо въ нихъ повторяются прежнія. Сказанныя теперь числа, то есть, кои идутъ до миріады миріадъ, назовемъ первыми, а миріаду миріадъ первыхъ чиселъ назовемъ единицею вторыхъ чиселъ, и станемъ считать сими единицами, ихъ десятками, сотнями, тысячами, миріадами, даже до миріады миріадъ. Потомъ, миріаду миріадъ вторыхъ чиселъ назовемъ единицею третьихъ, и станемъ считать третьихъ чиселъ единицами, ихъ десятками, сотнями, тысячами и миріадами, даже до миріады миріадъ. Такимъ же образомъ, миріаду миріадъ третьихъ чиселъ назовемъ единицею четвертыхъ, миріаду миріадъ четвертыхъ чиселъ назовемъ единицею пятыхъ, и будемъ продолжать симъ образомъ называть

слѣдующія числа, даже до миріады миріадъ чиселъ миріадомиріадныхъ. Таковаго количества чиселъ будетъ конечно для всего достаточно; однако же можно еще итти далѣе, слѣдующимъ образомъ: Назовемъ, сказанныя нами числа, числами перваго періода (22), а послѣднее число перваго періода, назовемъ единицею втораго періода, и опять миріаду миріадъ первыхъ чиселъ втораго періода, назовемъ единицею вторыхъ чиселъ сегоже періода, и, подобно сему, послѣднее изъ нихъ назовемъ единицею третьихъ чиселъ втораго же періода, и будемъ продолжать симъ способомъ называть слѣдующія числа даже до миріады миріадъ чиселъ миріадомиріадныхъ втораго періода. Потомъ назовемъ послѣднее число втораго періода единицею первыхъ чиселъ третьяго періода, и такъ далѣе, продолжая симъже образомъ называть слѣдующія числа, даже до миріады миріадъ чиселъ миріадомиріадныхъ періода миріадомиріаднаго.

Предположивъ сію номенклатуру, естьли будутъ, начиная отъ единицы, числа не-

прерывнопропорціональныя, коихъ вторый членъ десять: то восемь первыхъ членовъ, включая и единицу, будутъ тѣ, кои называются первыми, слѣдующія другія восемь, кои называются вторыми, такимъже образомъ и изъ прочихъ всякія восемь чиселъ, или всякая октада, будетъ получать наименованіе отъ разстоянія ея отъ октады первыхъ чиселъ. Слѣдственно восьмое число первой октады будетъ тысяча миріадъ, первое второй октады, которое есть единица вторыхъ чиселъ, будетъ миріада миріадъ, ибо оно десятикратное числа ему предшествовавшаго; восьмое число второй октады будетъ тысяча миріадъ вторыхъ чиселъ, первое число третьей октады, которое есть единица третьихъ чиселъ, будетъ миріада миріадъ, чиселъ вторыхъ, ибо оно десятикратное предъидущаго: итакъ очевидно, что будутъ многія октады, какъ уже сказано прежде.

Не безполезно также замѣтить еще слѣдующее. Ежели будетъ рядъ непрерывнопропорціональныхъ чиселъ, начиная отъ

единицы, и естьли два члена онаго перемножатся между собою; то произведеніе будетъ членъ сегоже ряда, столько удаленный отъ большаго множителя, сколько удаленъ меньшій отъ единицы; онъ же будетъ отъ единицы однимъ членомъ меньше удаленъ противу того, на сколько удалены отъ нее оба множителя. Ибо пусть будутъ A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, непрерывнопропорціональныя числа, начиная отъ единицы, такъ что A есть единица, и пусть произведеніе D на H будетъ X. Возмемъ ряда членъ M, который на столько удаленъ отъ H, на сколько D отъ единицы. Надлежитъ доказать, что X равно M. Поелику въ числахъ A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M пропорціональныхъ, на сколько D удалено отъ A, на столько M отъ H; то какъ D къ A, такъ M къ H. Но D есть D-кратное числа A; посему и M есть D-кратное числа H*: слѣдовательно M равно X. Итакъ явно, что произведеніе H на D есть членъ ряда, и удалено отъ большаго изъ множителей на столько членовъ, на сколько меньшій уда- *d. V.

**

ленъ отъ единицы. Сверхъ того явно, что сіе произведеніе будетъ удалено отъ единицы однимъ членомъ меньше противу числа членовъ, коими удалены оба вмѣстѣ множителя отъ единицы же. Ибо число членовъ, A, B, C, D, E, F, G, H, есть то, на сколько удалено H отъ единицы; а число членовъ K, L, M, есть однимъ меньше, противу числа членовъ отъ D до единицы, потому что число оныхъ вмѣстѣ съ H будетъ равно сему послѣднему.

Все сіе отчасти предположивъ а отчасти доказавъ, мы уже можемъ приступить къ нашему предложенію. Поелику предположено, что поперечникъ маковаго зерна не меньше $\frac{1}{40}$ дюйма; то явно, что шаръ, коего поперечникъ въ дюймъ, будетъ содержать въ себѣ не больше 64000 маковыхъ зеренъ: ибо онъ столько кратъ больше шара коего поперечникъ въ $\frac{1}{40}$ дюйма, поелику доказано, что шары суть взаимно
18, XII. въ утроенномъ отношеніи поперечниковъ. Но предположено было, что въ объемѣ песку, равномъ маковому зерну, число пе-

счинокъ не больше миріады: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ въ дюймъ, будетъ не больше миріады разъ шести миріадъ четырехъ тысячь; каковое число содержитъ въ себѣ шесть единицъ чиселъ вторыхъ и четыре тысячи миріадъ чиселъ первыхъ: слѣдственно меньше десяти единицъ чиселъ вторыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ во 100 дюймовъ, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ одинъ дюймъ, ибо шары суть взаимно въ утроенномъ отношеніи поперечниковъ. Итакъ, естьлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ въ 100 дюймовъ; то явно, что число песчинокъ было бы меньше произведенія десяти единицъ чиселъ вторыхъ на сто миріадъ. Поелику же десять единицъ чиселъ вторыхъ есть отъ единицы десятый пропорціональный членъ ряда, возрастающаго въ десятикратномъ отношеніи, а сто миріадъ, седьмый отъ единицы тогоже ряда: посему явно, что произведеніе ихъ будетъ сего же ряда шест-

надцатый членъ, также отъ единицы. Ибо доказано, что таковое произведеніе удалено отъ единицы однимъ членомъ меньше противу того, на сколько отъ нее удалены оба члена, онаго множители. Но между сими шестнадцатью членами, восемь первые, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, а другіе слѣдующіе восемь къ называемымъ вторыми, притомъ послѣдній изъ сихъ есть тысяча миріадъ чиселъ вторыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, имѣющемъ поперечникъ во 100 дюймовъ, будетъ меньше нежели тысяча миріадъ чиселъ вторыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ въ миріаду дюймовъ, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ во сто дюймовъ. Итакъ, естьлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ въ миріаду дюймовъ; то явно, что число песчинокъ, въ немъ содержащихся, было бы меньше произведенія тысячи миріадъ чиселъ вторыхъ на сто миріадъ. Поелику же тысяча миріадъ чиселъ вторыхъ есть отъ еди-

ницы шестнадцатый пропорціональный членъ, а сто миріадъ есть отъ единицы седьмый, одного и того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ сего же ряда двадцать вторый членъ также отъ единицы. Но между сими двадцатью двумя членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, а остальные шесть къ называемымъ третьими, притомъ послѣдній изъ нихъ есть десять миріадъ чиселъ третьихъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, имѣющемъ поперечникъ въ миріаду дюймовъ, будетъ меньше десяти миріадъ чиселъ третьихъ. И какъ шаръ, имѣющій поперечникъ въ стадію, меньше шара, имѣющаго поперечникъ въ миріаду дюймовъ (23): посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ въ стадію, будетъ меньше десяти миріадъ чиселъ третьихъ.

Шаръ, коего поперечникъ во сто стадій, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ одну стадію.

Итакъ, естьлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ во сто стадій; то явно, что число песчинокъ, въ немъ содержащихся, было бы меньше произведенія десяти миріадъ чиселъ третьихъ на сто миріадъ. Послику же десять миріадъ чиселъ третьихъ есть отъ единицы двадцать второй пропорціональный членъ, а сто миріадъ есть отъ единицы седьмый, одного и того же ряда: посему явно, что произведеніе ихъ будетъ сего же ряда двадцать-восьмый членъ, также отъ единицы. Но между сими двадцатью восьмью членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ, называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, слѣдующіе еще другіе восемь къ называемымъ третьими, а остальные четыре къ называемымъ четвертыми, притомъ послѣдній изъ нихъ есть тысяча единицъ чиселъ четвертыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ во сто стадій, будетъ меньше тысячи единицъ чиселъ четвертыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ въ миріаду

стадій, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ во сто стадій. Итакъ, естьлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ въ миріаду стадій; то явно, что число песчинокъ его было бы меньше произведенія тысячи единицъ чиселъ четвертыхъ на сто миріадъ. Поелику же тысяча единицъ чиселъ четвертыхъ есть отъ единицы двадцатьвосьмый пропорціональный членъ, а сто миріадъ, отъ единицы седьмый, одного тогоже ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ того же ряда тридцать четвертый членъ, также отъ единицы. Но между сими тридцатью четырьмя членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, слѣдующіе еще другіе восемь къ называемымъ третьими, слѣдующіе за сими восемь къ называемымъ четвертыми, а два остальные къ называемымъ пятыми, притомъ послѣдній изъ нихъ есть десять единицъ пятыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего попе-

речникъ въ миріаду стадій, будетъ меньше десяти единицъ чиселъ пятыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ во сто миріадъ стадій, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ миріаду стадій. Итакъ, естьлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ во сто миріадъ стадій; то явно, что число песчинокъ онаго было бы меньше произведенія десяти единицъ пятыхъ на сто миріадъ. Поелику же десять единицъ пятыхъ, есть отъ единицы тридцать четвертый пропорціональный членъ, а сто миріадъ, отъ единицы седмый, одного того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ сороковый членъ ряда, также отъ единицы. Но между сими сорока членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, слѣдующіе еще другіе восемь къ называемымъ третьими, слѣдующіе за третьими къ называемымъ четвертыми, а слѣдующіе за четвертыми къ называемымъ пятыми, притомъ послѣдній изъ

нихъ есть тысяча миріадъ чиселъ пятыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ во сто миріадъ стадій, будетъ меньше тысячи миріадъ чиселъ пятыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ въ миріаду миріадъ стадій, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ во сто миріадъ стадій. Итакъ, естлибъ былъ шаръ, имѣющій поперечникъ въ миріаду миріадъ стадій; то явно, что число песчинокъ было бы меньше произведенія тысячи миріадъ чиселъ пятыхъ на сто миріадъ. Поелику же тысяча миріадъ чиселъ пятыхъ есть отъ единицы сороковый пропорціональный членъ, а сто миріадъ, отъ единицы седмый, одного и того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ тогожъ ряда сорокъ шестый членъ, также отъ единицы. Но между сими сорока шестью членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, еще слѣдующіе восемь къ называемымъ треть-

ими, слѣдующіе за третьими восемь къ называемымъ четвертыми, слѣдующіе за четвертыми восемь къ называемымъ пятыми, а остальные шесть къ называемымъ шестыми, притомъ послѣдній изъ нихъ есть десять миріадъ чиселъ шестыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ въ миріаду миріадъ стадій, будетъ меньше десяти миріадъ чиселъ шестыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ во сто миріадъ миріадъ стадій, равенъ сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ миріаду миріадъ стадій. Итакъ, естьлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ во сто миріадъ миріадъ стадій; то явно, что число песчинокъ было бы меньше произведенія десяти миріадъ чиселъ шестыхъ на сто миріадъ. Поелику же десять миріадъ чиселъ шестыхъ есть отъ единицы сорокъ шестый пропорціональный членъ, а сто миріадъ есть отъ единицы седмый, одного и того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ тогожъ ряда пятьдесять второй членъ, так-

же отъ единицы. Но между сими пятьюдесятью двумя членами, первые сорокъ восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, вторыми, третьими, четвертыми, пятыми и шестыми, а остальные четыре къ числамъ седмымъ, притомъ послѣдней изъ нихъ есть тысяча единицъ чиселъ седмыхъ: посему явно, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ во сто миріадъ миріадъ стадій, будетъ меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ.

Поелику же доказано, что поперечникъ міра составляетъ меньше нежели сто миріадъ миріадъ стадій; то явно, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ равномъ міру, меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ. Слѣдовательно доказано, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, равномъ тому, каковымъ полагаютъ большая часть Астрономовъ шаръ міра, будетъ меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ.

Теперь мы докажемъ, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, величиною равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ или

небесному, предполагаемому Аристархомъ, будетъ меньше тысячи миріадъ чиселъ седмыхъ. И дѣйствительно, поелику предположено, что земля къ шару, называемому міромъ, имѣетъ тоже отношеніе, что шаръ называемый міромъ, къ шару неподвижныхъ звѣздъ, предполагаемому Аристархомъ, и что поперечники сихъ шаровъ имѣютъ взаимно отношеніе; и поелику доказано, что поперечникъ міра есть меньше миріаду разъ взятаго поперечника земли: то явно, что поперечникъ шара неподвижныхъ звѣздъ будетъ меньше миріаду разъ взятаго поперечника міра (24). Но шары суть взаимно въ утроенномъ отношеніи своихъ поперечниковъ: посему явно, что шаръ неподвижныхъ звѣздъ, предполагаемый Аристархомъ, будетъ меньше, нежели миріаду миріадъ разъ миріадъ взятый шаръ міра. Доказано же, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, каковъ шаръ міра, меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ: посему явно, что естьли бы былъ шаръ песку, величиною такой, каковымъ Аристархъ предполагаетъ шаръ

неподвижныхъ звѣздъ; то число песчинокъ, былобы меньше произведенія тысячи единицъ чиселъ седмыхъ на миріаду миріадъ разъ миріадъ. Поелику же тысяча единицъ чиселъ седмыхъ есть отъ единицы пятьдесятъ вторый пропорціональный членъ, а миріада миріадъ разъ миріадъ, отъ единицы тринадцатый, одного и того же ряда; посему явно, что произведеніе ихъ будетъ шестьдесятъ четвертый членъ того же ряда. Но сіе число есть восьмое чиселъ восьмыхъ, то есть оно означаетъ тысячу миріадъ чиселъ восьмыхъ: слѣдовательно явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, каковъ неподвижныхъ звѣздъ, предполагаемый Аристархомъ, будетъ меньше тысячи миріадъ чиселъ восьмыхъ.

Государь! Сказанное мною конечно покажется невѣроятнымъ для многихъ изъ тѣхъ, кои не занимались Маѳематическими науками: но будетъ достовѣрно, поелику доказано, для упражнявшихся въ оныхъ, когда внимательно разсмотрятъ что я сказалъ о разстояніяхъ и величинѣ земли,

солнца, луны и цѣлаго міра. Впрочемъ, я съ своей стороны нахожу, что полезно было бы, когда бъ и другіе разобрали сей предмѣтъ еще обстоятельнѣе.

~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~

ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ ПСАММИТУ.

(1) Архимедъ говоритъ здѣсь объ Ариѳметикѣ своей, подъ названіемъ *Αρχαι*, которая до насъ не дошла.

(2) Поелику центръ шара вразсужденіи поверхности есть ничто; то Аристархово выраженіе, повидимому означаетъ, что радіусъ орбиты земли всравненіи съ радіусомъ небеснаго шара, или неподвижныхъ звѣздъ, есть ничтожный, или какъ нынѣ выражаются, безконечно малый.

(3) Миріада значитъ 10,000. См. въ Журналѣ Департамента Народнаго просвѣщенія N N° V—VII. 1822 г. статью: *Опытъ Практической Ариѳметики древнихъ Грековъ.*

(4) Греческая стадія имѣла въ себѣ около 504 футовъ и $4\frac{1}{2}$ дюймовъ Англійской мѣры.

(5) Триста миріадъ стадій будетъ около 432,321 версты, слѣдственно слишкомъ въ десять разъ больше настоящаго; ибо земля, какъ извѣстно, имѣетъ въ окружности почти 37,500 верстъ.

(6) Поперечникъ солнца почти во 100 разъ больше поперечника земли, а сей почти въ 4 раза больше поперечника луны: слѣдственно поперечникъ солнца почти въ 440 разъ больше поперечника луны.

(7) То есть въ 30′. Нынѣ извѣстно, что величина видимаго поперечника солнца есть, въ перигеѣ 32′ 38″.6, а въ апогеѣ 31′ 33″.8.

(8) Когда смотрѣть на солнце при его восхожденіи или захожденіи, то, какъ извѣстно, свѣтъ онаго менѣе тягостенъ для глазъ, нежели въ другое время дня. Ослаблять же свѣтъ, кажется тогда еще не знали.

(9) Въ подлинникѣ сказано: *μέγεθος στρογγύλον*.

(10) То есть меньше $32' \, 55\frac{25}{41}''$ а больше 27′. Нельзя не удивиться, что Архимедъ такимъ простымъ и, можно сказать, грубымъ способомъ могъ до такой степени приблизиться къ истиннѣ.

(11) И дѣйствительно, когда центръ солнца на горизонтѣ, то DK, будучи касательная къ земле,
18, III. млѣ, перпендикулярна къ ея радіусу, протянутому до D, и потому HK будетъ больше DK. По мѣрѣ же того, какъ солнце поднимается надъ горизонтъ, уголъ HDK увеличивается, а уголъ DHK уменьшается, и слѣдственно HK тѣмъ паче
19, I. будетъ больше, нежели DK.

(12) Въ треугольникахъ DNK, HRK углы при

N и R прямые, сторона KN равна KR, а DK меньше (по предыдущ. примѣч.) HK: посему уголъ NDK больше угла RHK*, а посему двукратный больше двукратнаго, то есть уголъ LDO угла MHP. *52, I.

(13) Поелику изъ доказательства 3 предложенія Измѣренія круга видно, что окружность круга къ поперечнику онаго имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 22 къ 7; но очертаніе вписаннаго многоугольника меньше окружности: посему очертаніе многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, къ поперечнику онаго тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 22 къ 7*, слѣдственно къ радіусу имѣетъ меньшее нежели 22 къ $\frac{7}{2}$, то есть, нежели 44 къ 7. *сл: т, V.

(14) Изъ предъидущаго примѣчанія слѣдуетъ, что очертаніе 656-тиугольника вписаннаго къ радіусу KH имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 44 къ 7: посему одна сторона сего многоугольника къ KH имѣетъ меньшее, нежели $\frac{44}{656}$ или $\frac{11}{164}$ къ 7, то есть, нежели 11 къ 1148. Но AB меньше стороны: слѣдственно AB къ KH тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 11 къ 1148. И поелику $\frac{11}{1148}$ меньше $\frac{1}{100}$, то 11 къ 1148 имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1 къ 100: чего ради AB къ KH тѣмъ паче имѣетъ меньшее, нежели 1 къ 100, или, что все равно, 1 къ 100 имѣетъ большее отношеніе, неже-

ли AB къ KH. Но 1 во 100 разъ меньше числа 100: посему AB будетъ слишкомъ во 100 разъ меньше прямой KH.

(15) Поелику поперечникъ SG меньше нежели $\frac{1}{100}$ HK; то, естьли HK раздѣлить на 100 равныхъ частей, будетъ SG, а тѣмъ паче HU съ KS, меньше одной таковой части: слѣдственно остальная прямая US будетъ больше 99 частей: и потому HK къ SU имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 100 къ 99.

(16) Пусть величины A, B, C, D, E, F будутъ такія, что A къ B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели C въ D, и что A не меньше E, а B меньше F. Говорю, что E къ F имѣетъ меньшее отношеніе, нежели C къ D.

Поелику A не меньше E, то A къ B имѣетъ
7 и 8, V. не меньшее отношеніе, нежели E къ B. Еще же, поелику B меньше F, то E къ B имѣетъ
8, V. большее отношеніе, нежели къ F. Доказано же, что A къ B имѣетъ не меньшее отношеніе, нежели E къ B: слѣдственно тѣмъ паче A къ B
13 и (55), V. имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F, то есть, E къ F меньшее, нежели A къ B. A по положенію, A къ B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели C къ D: чего ради и E къ F имѣетъ
(55). меньшее, нежели C къ D.

(17) Вотъ доказательство сего предложенія:

Пусть будутъ два треугольника ABC, DEF прямоугольные при B, E, въ коихъ BC равна EF, а AB больше DE. Говорю, что уголъ D къ углу A, который меньше D, имѣетъ большее отношеніе, нежели AC къ DF, а меньшее, нежели AB къ DE.

Возьми BG равную ED, и протяни GC: посему GC равна DF, и уголъ CGB равенъ углу FDE*. Продолжи GC, и сдѣлай GH равную AC, *4, 1.
и отъ H проведи, перпендикулярную къ продолженной AB, прямую HK, и около поперечниковъ AC, GH напиши круги, то ихъ окружности пройдутъ чрезъ B, K, ибо углы при сихъ точкахъ суть прямые.

Поелику поперечники круговъ ABC, GKH равны, то и самые круги равны. А равныхъ круговъ дуги имѣютъ взаимно, большая къ меньшей, большее отношеніе, нежели стягивающія ихъ прямыя: посему дуга HK къ дугѣ CB имѣетъ большее отношеніе, нежели прямая HK къ прямой CB. Но какъ дуга HK къ дугѣ CB, такъ уголъ HGK къ углу CAB: посему уголъ HGK къ углу CAB имѣетъ большее отношеніе, нежели прямая HK къ прямой CB, то есть, уголъ FDE къ углу CAB имѣетъ большее отношеніе, нежели AC къ DF.

Теперь сдѣлай AR равную DE, и отъ R поставь перпендикулярную къ AB прямую RS, и

сдѣлай ее равною EF, и протяни AS; посему AS равна DF, и уголъ SAR равенъ углу FDE. Пусть SR пресѣкаетъ прямую AC въ U, и изъ точки A радіусомъ AU напиши кругъ. Итакъ, уголъ VAU къ углу UAT имѣетъ тоже отношеніе, что
33, VI. вырѣзокъ VAU къ вырѣзку UAT. Но вырѣзокъ VAU къ вырѣзку UAT имѣетъ меньшее отно-
8. шеніе, нежели къ треугольнику ARU: посему и уголъ VAU къ углу UAT имѣетъ меньшее отношеніе, нежели вырѣзокъ VAU къ треугольнику ARU, и слѣдовательно меньшее, нежели треугольникъ SAU къ треугольнику UAR, то есть,
·, VI. нежели SU къ UR. Чего ради совокупленіемъ, уголъ VAT къ углу UAT имѣетъ меньшее от-
h, V. ношеніе, нежели SR, то есть CB, къ UR. А какъ CB къ UR, такъ AB къ AR: посему уголъ VAT къ углу UAT имѣетъ меньшее отношеніе, нежели AB къ AR, то есть, уголъ FDE къ углу CAB имѣетъ меньшее отношеніе, нежели AB къ DE.

(18) То есть $\frac{100}{20000}$ къ $\frac{99}{20000}$, то есть $\frac{1}{200}$ къ $\frac{99}{20000}$.

(19) Ибо $\frac{99}{20000}$ равно $\frac{1}{202 + \frac{2}{99}}$, и слѣдовательно больше $\frac{1}{203}$.

(20) Среднее разстояніе земли отъ солнца равно 23709 радіусамъ земли.

(21) Дюймъ Греческій былъ не многимъ боль-

ше $\frac{3}{4}$ нашего дюйма. См. о Вѣсахъ и мѣрахъ Машинскаго, стран. 8.

(22) Слѣдственно въ періодѣ будетъ не восемь октадъ, какъ пишетъ Пейрардъ (*), а миріада миріадъ то есть 100,000000 октадъ: итакъ послѣднія числа перваго періода по нашей Ариѳметикѣ будутъ изображатся 800 милліоновъ цыфръ.

(23) Въ Греческой стадіи считалось 9,600 дюймовъ. См. о вѣсахъ и мѣр. Машинскаго, стр. 8.

(24) По опредѣленію новѣйшей Астрономіи, разстояніе ближайшей неподвижной звѣзды отъ солнца или земли, будетъ не менѣе 100,000 радіусовъ міра.

(*) Oeuvres d'Archimède, par Peyrard. 1807, pag. 516.

ОБЩАЯ ѲЕОРІЯ

ВЕЛИЧИНЪ ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Ежели будутъ двѣ неравныя величины такія, что меньшая въ большей содержится безъ остатка; то бо́льшая называется кратною меньшей, а ме́ньшая частною большей. — Пусть будетъ A = nB (*), то величина A есть кратная величины B, а B есть частная величины A.

(*) Большими буквами означаются величины вообще, а малыми цѣлыя числа, первыми: a, b, c, d, ... опредѣленныя, кои могутъ быть и неопредѣленными, а послѣдними: m, n, p, q... токмо неопредѣленныя.

2. Когда въ двухъ бо́льшихъ величинахъ содержатся двѣ меньшія одинакое число разъ и безъ остатка, каждая въ каждой; то бо́льшія называются равнократными меньшихъ, а меньшія равночастными бо́льшихъ. Тоже разумѣется о трехъ или болѣе величинахъ. — Напр. когда A $=$ nB, а C $=$ nD, то A и C суть равнократныя величинъ B и D, а B и D равночастныя величинъ A и C, каждая каждой.

3. Когда четыре величины суть таковы, что взявъ равнократно первую и
* опр. 2. третью*, также равнократно вторую и четвертую, оба раза *неопредѣленно*, будутъ кратныя такія, что естьли изъ нихъ первая больше второй, то и третья больше четвертой, а естьли равна, то равна, а естьли меньше, то меньше: тогда о тѣхъ четырехъ величинахъ говорится, что первая ко второй имѣетъ тоже отношеніе, какое третья къ четвертой, или: что отношеніе первыхъ двухъ равно(*)

(*) Слово *равно* въ опредѣленіи 3, и слова *больщее* и *меньшее* въ опр. 4 принимаются въ осо-

отношенію послѣднихъ двухъ, и обратно. — Когда, напр. величины A, B, C, D таковы, что взявъ mA, nB, mC, nD, будетъ:

есшьли $mA > nB$, то $mC > nD$,

а естьли $mA = nB$, то $mC = nD$,

а естьли $mA < nB$, то $mC < nD$;

въ такомъ случаѣ говорится, что какое имѣетъ отношеніе A къ B, тоже имѣетъ и C къ D.

Примѣчаніе. Для краткости говорится; какъ A къ B, такъ C къ D, а пишется A : B : : C : D.

4. Когда же четыре величины суть таковы, что взявъ равнократно первую и третью, также равнократно вторую и четвертую, каждый разъ *опредѣленно или неопредѣленно*, будутъ кратныя такія, что первая изъ нихъ больше второй, а третья не больше четвертой; тогда говорится, что первая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ

бенномъ значеніи, то есть оными выражаются токмо условія, по коимъ величины принадлежатъ къ тому или другому изъ тѣхъ опредѣленій.

четвертой, или что отношеніе первыхъ двухъ больше отношенія послѣднихъ двухъ. Говорится и обратно, то есть, что третья къ четвертой имѣетъ меньшее отношеніе, нежели первая ко второй; или, что отношеніе третьей къ четвертой, меньше отношенія первой ко второй. — Когда, напр. величины A, B, C, D таковы, что взявъ aA, bB, aC, bD, будетъ aA больше нежели bB, но aC не больше нежели bD: то говорится, что A къ B имѣетъ большее отношеніе нежели C къ D, или C къ D меньшее нежели A къ B.

Примѣч. Для краткости сказанное отношеніе пишется: $A:B > C:D$, или $C:D < A:B$.

Слѣдствіе 1. Изъ опредѣленій 3 и 4 явствуетъ, что *отношеніе* двухъ величинъ есть нѣкая зависимость ихъ между собою, опредѣляемая при сравненіи оныхъ съ другими двумя величинами, или съ другимъ отношеніемъ.

Слѣд. 2. Оттуда же явствуетъ, что отношеніе имѣютъ токмо такія неравныя величины, изъ коихъ меньшая взятая крат-

по можетъ сдѣлаться больше большей (*).

Сл. 3. Явствуетъ еще, что члены отношенія должны быть одного рода.

Сл. 4. Поелику же и всѣ четыре величины, находящіяся въ равныхъ или неравныхъ* отношеніяхъ, могутъ быть одного рода; то еще явствуетъ, что одинъ изъ нихъ можетъ занимать два мѣста. *опр. 3 и 4.

5. Равенство двухъ отношеній называется пропорціею*, а неравенство пропорціею неравенства*. Величины въ первомъ случаѣ называются пропорціональными, а во второмъ пропорціональными въ неравенствѣ. *опр. 3. *опр. 4.

6. Первый членъ всякаго отношенія называется предъидущимъ, а вторый послѣдующимъ.

7. Величины называются непрерывно-пропорціональными, ежели первая ко второй

(*) И потому нуль, и такъ называемыя безконечно великія или безконечно малыя количества членами отношенія быть не могутъ. Сіе обстоятельство весьма важно, и заслуживаетъ величайшаго вниманія Геометровъ.

рой имѣетъ тоже отношеніе, что вторая къ третьей, а вторая къ третьей тоже, что третья къ четвертой, и такъ далѣе.—Посему, когда A : B : : B : C : : C : D : : D : E; то величины A, B, C, D, E называются непрерывно пропорціональными.

8. Когда три величины непрерывно пропор-
опр. 7. ціональны, то говорится, что первая къ третьей имѣетъ удвоенное отношеніе первыя ко второй: и обратно, первая ко второй имѣетъ половинное первыя къ третьей. — Такъ, естьли A : B : : B : C, то удвоенное отношеніе A къ B значитъ отношеніе A къ C, и обратно, половинное отношеніе A къ C значитъ отношеніе A къ B.

9. Когда четыре величины непрерывно про-
опр. 7. порціональны, то говорится, что первая къ четвертой имѣетъ утроенное отношеніе первыя ко второй, и обратно. Итакъ далѣе, когда будетъ величинъ пять, и болѣе. Такъ, естьли A : B : : B : C : : C : D, то утроенное отношеніе A къ B значитъ отношеніе A къ D.

Примѣч. Удвоенное отношеніе A къ B для краткости означается чрезъ $\overline{A : B}^{2}$, у-

троенное отношеніе А къ В чрезъ $\overset{3}{\overline{A:B}}$, и такъ далѣе.

10. Сходственными величинами или членами называются предъидущій съ предъидущимъ, а послѣдующій съ послѣдующимъ*. — Такъ въ А:В::С:D, или въ А:В>С:D, А съ С, а В съ D суть сходственные. * опр. 6.

11. Ежели изъ четырехъ величинъ, первая ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что̀ четвертая къ третьей, то говорится, что первыя двѣ суть въ обратномъ отношеніи послѣднихъ двухъ. — Напр. Когда изъ А, В, С, D, будетъ А:В::D:С, то говорится, что А къ В въ обратномъ отношеніи С къ D.

12. Примѣненіе отношеній есть взятіе предъидущей* величины къ предъидущей, а послѣдующей къ послѣдующей. — Такъ А:В С:D, будетъ премѣненіемъ, А:С::В:D. * опр. 6.

13. Преложеніе отношенія есть взятіе послѣдующей, какъ предъидущей, къ предъидущей, какъ послѣдующей. — Такъ, изъ А:В будетъ преложеніемъ, В:А.

14. Совокупленіе отношенія есть взятіе суммы обѣихъ величинъ къ послѣдующей. —

Такъ изъ А:В совокупленіемъ будетъ (А + В):В.

15. Отдѣленіе отношенія есть взятіе разности или избытка предъидущей величины предъ послѣдующею къ послѣдующей. — Такъ, изъ А:В отдѣленіемъ будетъ (А—В):В.

16. Обращеніе отношенія есть взятіе предъидущей величины къ разности или избытку предъидущей предъ послѣдующею. — Такъ, изъ А:В обращеніемъ будетъ А:(А—В.)

17. Равномѣстіе отношеній называется, когда въ двухъ пропорціональныхъ рядахъ* равномногихъ (*) величинъ, взяты будутъ отношенія членовъ, одинакія мѣста занимающихъ. — Такъ, ежели въ рядахъ

А, В, С, D,

Е, F, G, Н,

коихъ члены по порядку имѣютъ отношенія: А:В::Е:F, В:С::F:G, С:D::G:Н, или А:В:: G:Н, В:С:: F:G, С:D:: Е:F; то отношеніе А:С съ отношеніемъ Е:G

(*) То есть, равныхъ числомъ.

или G:E, также отношенiе A:D съ E:H или H:E, и пр. называются равномѣстными.

18. Равномѣстiе прямое отношенiй, или просто, равномѣстiе, называется, когда въ двухъ пропорцiональныхъ рядахъ равномногихъ величинъ взяты будутъ въ одинакомъ порядкѣ отношенiя членовъ, одинакiя мѣста занимающихъ. — Въ предъидущемъ примѣрѣ: A:D съ C:H, или B:D съ F:H суть отношенiя прямо равномѣстныя.

19. А естьли будутъ не въ одинакомъ порядкѣ сказанныя отношенiя*, то называется равномѣстiемъ обратнымъ. — Въ томъ же примѣрѣ: A:D съ H:E, ипр. суть отношенiя обратно равномѣстныя. *опр. 18.

20. Ежели будетъ одинъ рядъ непрерывно-пропорцiональныхъ величинъ, и другой рядъ отношенiй тожественныхъ съ отношенiями величинъ перваго ряда: то говорится, что первая величина къ послѣдней перваго ряда имѣетъ отношенiе сложенное изъ отношенiй втораго ряда. Напр. пусть будутъ величины A, B, C, D и отношенiя M:N, P:Q, R:S, такiя, что

A⁚B⁚⁚M⁚N,
B⁚C⁚⁚P⁚Q,
C⁚D⁚⁚R⁚S;

то говорится, что A⁚D имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній M⁚N, P⁚Q, и R⁚S.

Примѣчаніе. Для краткости предъидущее отношеніе пишется:

A⁚D⁚⁚(M⁚N)+(P⁚Q)+(R⁚S).

АКСІОМЫ.

1. Равнократныя или равночастныя тогоже или равныхъ, суть и взаимно равны.

2. Равнократныя или равночастныя неравныхъ, суть и взаимно неравны.

3. Когда одна величина къ другой своего рода, имѣетъ отношеніе; то и всякая данная величина къ нѣкоей величинѣ своегоже рода имѣетъ отношеніе. Иначе: ежели будутъ три величины, изъ коихъ двѣ первыя имѣютъ отношеніе, то всегда есть четвертая величина къ коей третья имѣетъ тоже, большее или меньшее отношеніе.

Предложенія.

I.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнократны, каждая каждой; то сколько одна есть кратная одной, столько и всѣ будутъ кратны всѣхъ.

Пусть будетъ сколько ни есть величинъ A, B, C, кои равномногихъ другихъ D, E, F равнократны*, каждая каждой, то есть, пусть будетъ *опр. 2.

$$A = mD,$$

$$B = mE,$$

$$C = mF.$$

Говорю, что $(A + B + C) = m(D + E + F)$.

И дѣйствительно,

$$A = D + D + D + \ldots m \text{ разъ},$$

$$B = E + E + E + \ldots m \text{ разъ},$$

$$C = F + F + F + \ldots m \text{ разъ};$$

посему $(A + B + C) = (D + E + F) + \ldots m$ разъ, то есть, $A + B + C = m(D + E + F)$

II.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой, равнократны, также пятая

второй и шестая четвертой равнократны: то и совокупно, первая съ пятою второй и третья съ шестою четвертой, будутъ рнвнократныя.

Пусть будутъ шесть величинъ

$$A, B, C, D,$$
$$E, F,$$

такія, что $A = mB$, $C = mD$,

$$E = nB, F = nD.$$

Говорю, что $A + E = (m + n)B$, $C + F = (m + n)D$, то есть, что $(A + E)$, $(C + F)$ суть равно-

опр. 2. кратныя величинъ B, D.

И дѣйствительно,

$$A = B + B + B + \ldots m \text{ разъ},$$
$$E = B + B + B + \ldots n \text{ разъ};$$

посему $A + E = B + B + B + B + \ldots (m + n)$ разъ, то есть, $A + E = (m + n)B$.

Такъ же докажется, что $C + F = (m + n)D$.

III.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой будутъ равнократны, и взяты будутъ первой и третьей равнократныя: то и сіи взятыя будутъ равнократны второй и четвертой, каждая каждой.

Пусть будутъ величины A, B, C, D такія,

что $A = mB$, $C = mD$, и пусть взяты будутъ nA, nC. Говорю, что и nA, nC будутъ равнократны величинъ B, D, каждая каждой.

Поелику $A = B + B + B + \ldots m$ разъ,

$C = D + D + D + \ldots m$ разъ;

то $nA = nB + nB + nB + \ldots mn$ разъ* $= mnB$, *акс. 1.

$nC = nD + nD + nD + \ldots mn$ разъ $= mnB$.

Итакъ, $nA = mnB$,

$nC = mnD$.

IV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой; то и равнократныя первой величины и третьей къ равнократнымъ второй величины и четвертой, по какому ни есть кратствованію, будутъ имѣть тоже отношеніе, взятыя поперемѣнно.

Пусть будетъ $A : B :: C : D$*. Говорю, что $mA : nB :: mC : nD$. *опр. 3.

Возьми $E = p.mA$, $F = p.mC$,

$G = q.nB$, $H = q.nD$,

то есть, еще равнократно первую и третью и такъ же вторую и четвертую: посему E, F равнократны величинъ A, C,

а G, H равнократны величинъ B, D, каждая
3. каждой. Итакъ, поелику A:B::C:D; то,
опр. 3. въ слѣдствіе опредѣленія пропорціи, естьли $E>G$, то $F>H$, а естьли $E=G$, то $F=H$, а естьли $E<G$, то $F<H$. Но какъ величинъ mA, nB, mC, nD, суть кратныя E, G, F, H, ибо сіи означаютъ pmA, qnB, pmC, qnD: слѣдственно, также по опредѣленію пропорціи, будетъ $mA:nB::mC:nD$.

Слѣдствіе 1. Такимъ же образомъ докажется, что ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, какое третья къ четвертой; то и равнократныя первой и третьей будутъ ко второй и четвертой имѣть тоже отношеніе, и такъ же первая и третья будутъ къ равнократнымъ второй и четвертой имѣть тоже отношеніе.

Слѣд. 2. Поелику доказано, что естьли $E>G$, то $F>H$, а естьли $E=G$, то $F=H$, а естьли $E<G$, то $F<H$; слѣдовательно также доказано, что естьли $G>E$, то $H>F$, а естьли $G=E$, то $H=F$, а естьли $G<E$, то $H<F$: а посему будетъ $nB:mA::nD:mC$. Отсюда явствуетъ, что

естьли величины пропорціональны, то и преложеніемъ* пропорціональны. *опр. 1

V.

Ежели цѣлая величина цѣлой, и отнятая отъ оной отнятой отъ другой суть равнократныя; то и остальная остальной и цѣлая цѣлой будутъ равнократныя.

Пусть будутъ $A = C + D$, а $B = E + F$ такія, что $A = nB$, а $C = nE$. Говорю, что $D = nF$.

Поелику $A = nB$, а $B = E + F$; то $A = (E + F) + (E + F) + (E + F) + \ldots n$ разъ $= E + E + E + \ldots n$ разъ $+ F + F + F + \ldots n$ разъ, $= nE + nF$. Но $A = C + D$: посему $C + D = nE + nF$. Или, по причинѣ что $C = nE$, будетъ $nE + D = nE + nF$. Слѣдственно $D = nF$.

VI.

Ежели двѣ величины равнократны двухъ величинъ, и отнятыя нѣкія(*) такожъ равнократны сихъ самихъ величинъ; то остальныя (**) будутъ или равныя имъ же, или равнократныя ихъ.

(*) То есть, нѣкоторыя ихъ части.
(**) Т. е. остатки.

Пусть будетъ $A = C + D = mG$,
$B = E + F = mH$,
$C = nG$,
$E = nH$.

Говорю, что величины D, F или равны величинамъ G, H, каждая каждой, или равнократны оныхъ.

Пусть, вопервыхъ, $D = G$: говорю, что $F = H$.

Поелику A или $(C + D) = mG$,
и $C = nG$;
то $A - C$ или $D = (m - n)\, G$. Но по положенію $D = G$: посему $m - n = 1$.

Еще же, поелику B или $E + F = mH$,
и $E = nH$,
то $B - E$ или $F = (m - n)H$. Но, по доказанному, $m - n = 1$: слѣдственно $F = H$.

Итакъ, когда $D = G$, то $F = H$.

Естьли же $m - n > 1$, то, поелику найдено
$D = (m - n)\, G$,
$F = (m - n)\, H$;
посему явствуетъ, что D, F суть равно-
опр. 2. кратны величинъ G, H.

VII.

Равныя величины къ тойже имѣютъ

тоже отношеніе. И таже величина къ равнымъ имѣетъ тоже отношеніе.

Пусть будутъ величины A, B, C такія, что $A = B$. Говорю, что

$$A : C :: B : C,$$
$$C : A :: C : B.$$

Возьми mA, mB, mC: посему $mA = mB$.
Итакъ, естьли $mA > nC$, то $mB > nC$,
а естьли $mA = nC$, то $mB = nC$,
а естьли $mA < nC$, то $mB < nC$.
Посему величинъ A, C, B, C, кратныя mA, nC, mB, nC, имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи пропорціи*; а посему * опр. 3.

$$A : C :: B : C.$$

Говорю еще, что $C : A :: C : B$ (*). Поелику доказано, что $mA = mB$:
посему естьли $nC > mA$, то $nC > mB$,
а естьли $nC = mA$, то $nC = mB$,
а естьли $nC < mA$, то $nC < mB$.
Итакъ величинъ, C, A, C, B кратныя

(*) Сія вторая часть слѣдуетъ также непосредственно изъ первой и слѣдствія къ предложенію 4.

nC, mA, nC, mB имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи пропорціи; а посему

$$C:A::C:B$$

VIII.

Изъ неравныхъ величинъ большая къ тойже имѣетъ большее отношеніе, нежели меньшая. И таже величина къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели къ большей.

Пусть будутъ величины A, B, C такія, что $A > B$. Говорю, что

*опр. 4.

$$A:C > B:C^{*},$$

$$C:B > C:A.$$

Поелику $A > B$, то пусть $A = B + D$. Итакъ меньшая изъ величинъ B, D взятая кратно будетъ наконецъ больше величины C.

Пусть, вопервыхъ, будетъ D меньшая. Возьми кратную ея бóльшую величины C (*), которая пусть будетъ E равная $aD > C$. И возьми $F = aB$, и величины C двукратную, трикратную, и проч. пока получится первая бóльшая величины F.

(*) Здѣсь должно брать кратно величину D, хотя бы она сама по себѣ была больше величины C.

Пусть будетъ 4C таковая кратная: посему $F < 4C$, а $F \lhd 3C$ (*). И поелику $E = aD$, $F = aB$, то $E + F = a\ (D + B)$*, *1.
или $E + F = aA$. Но $E > C$, а $F \lhd 3C$; посему $E + F$ или $aA > 4C$. Итакъ, поелику величинъ A, C, B, C кратныя aA, $4C$, aB, $4C$, суть таковы, что $aA > 4C$, а aB то есть $F \rhd 4C$: слѣдственно, по свойству неравной пропорціональности*, *опр. 4.

$$A : C > B : C.$$

Говорю также, что $C : B > C : A$. Ибо въ предъидущемъ доказано, что величинъ C, B, C, A кратныя $4C$, aB, $4C$, aA суть таковы, что $4C$ или $E > aB$, и $4C \rhd aA$: слѣдственно, по свойству неравной пропорціональности,

$$C : B > C : A.$$

Но пусть изъ величинъ B, D будетъ меньшая B. Возьми кратную ея бо́льшую величины C, и пусть будетъ E равная $aB > C$. И возьми $F = aD$, и опять величины C кратную, которая первая больше F.

(*) Знакъ $\rhd$ показываетъ *не больше*, а знакъ $\lhd$ *не меньше*.

И пусть таковая будетъ $4C$. Посему $F < 4C$, и $F \not< 3C$. Притомъ же опять
*1. $E + F = a(D + B)^* = aA$. Но какъ $B < D$,
*акс. 2. то есть $aB < aD^*$, а aD или $F < 4C$; посему $aB \not> 4C$. Итакъ, величинъ A, C, B, C, кратныя aA, $4C$, aB, $4C$ суть таковы,
*опр. 4. что $aA > 4C$, а $aB \not> 4C$: посему $A : C > B : C^*$.

Далѣе, что $C : B > C : A$, докажется, какъ и въ первой части.

IX.

Величины, къ тойже величинѣ имѣющія тоже отношеніе, взаимно равны. И къ которымъ таже величина имѣетъ тоже отношеніе, и тѣ взаимно равны.

Пусть величины A, B къ величинѣ C имѣютъ тоже отношеніе, то есть, пусть
*опр. 3. будетъ $A : C :: B : C^*$. Говорю, что $A = B$.

Естьли же нѣтъ, то $A > B$, или $A < B$. Посему было бы $A : C > B : C$,
*8. или $A : C < B : C^*$;
что противно положенію: слѣдственно $A = B$.

Пусть еще одна и таже величина C къ величинамъ A, B имѣетъ тоже отноше-

ніе, то есть, пусть C:A::C:B. Говорю, что A = B (*).

Естьли же нѣтъ, то A > B, или A < B. Посему было бы C:A < C:B,

или C:A > C:B*; *8.

что противно положенію: слѣдственно A = B.

X.

Изъ величинъ, къ тойже величинѣ имѣющихъ отношеніе, которая имѣетъ большее отношеніе, та есть большая. И къ которой величинѣ таже имѣетъ большее отношеніе, та есть меньшая.

Пусть изъ величинъ A, B, величина A къ величинѣ C имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ C, то есть, пусть A:C > B:C*. Говорю, что A > B. *опр. 4.

Естьли же нѣтъ, то A = B, или A < B. Посему было бы A:C::B:C*, *7.

или A:C < B:C*; *8.

что противно положенію: слѣдственно A > B.

Пусть еще одна и таже величина C къ величинѣ B имѣетъ большее отношеніе,

(*) Сія вторая часть слѣдуетъ также изъ первой и изъ слѣдствія къ предложенію 4.

опр. 4. нежели къ A, то есть пусть C:B > C:A.
Говорю, что B < A.

Естьли же нѣтъ, то B = A, или B > A.
7. Посему было бы C:B: :C:A,
8. или C:B < C:A;
что противно положенію: слѣдственно B < A.

XI.

Отношенія, кои суть тѣже съ тѣмъже отношеніемъ, суть и взаимно тѣже.

Пусть A:B: :C:D, а C:D: :E:F, то есть, пусть отношенія A:B, и E:F будутъ рав-
опр. 3. ны или тожественны съ однимъ и тѣмъже отношеніемъ C:D. Говорю, что оныя отношенія будутъ взаимно тожественны или равныя, то есть будетъ A:B: :E:F.

опр. 6. Возьми предъидущихъ членовъ равнократныя mA, mC, mE, и послѣдующихъ другія равнократныя nB, nD, nF.
Поелику A:B: :C:D, посему, изъ равнократныхъ mA, nB, mC, nD,

естьли $mA > nB$, то $mC > nD$,
а естьли $mA = nB$, то $mC = nD$,
опр. 3. а естьли $mA < nB$, то $mC < nD$.

Еще же, поелику C:D: :E:F, посему также

естьли $mC > nD$, то $mE > nF$,
а естьли $mC = nD$, то $mE = nF$,
а естьли $mC < nD$, то $mE < nF$*. *опр. 3.

Теперь, сравнивъ сіи кратныя съ предъидущими кратными, будетъ:
естьли $mA > nB$, то $mC > nD$, то $mE > nF$,
или короче: естьли $mA > nB$, то $mE > nF$,
а естьли $mA = nB$, то $mE = nF$,
а естьли $mA < nB$, то $mE < nF$.

Слѣдственно, по опредѣленію пропорціи*, *опр. 3.

$A : B :: E : F$.

XII.

Естьли будетъ сколько ниесть величинъ пропорціональныхъ; то какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ.

Пусть будетъ сколько ниесть величинъ A, B, C, D, E, F пропорціональныхъ*, то *опр. 5. есть $A : B :: C : D :: E : F$. Говорю, что

$A : B :: (A + C + E) : (B + D + F)$.

Возьми равнократныя mA, mC, mE, и другія равнократныя nB, nD, nE. Поелику $A : B :: C : D :: E : F$, и взяты кратныя mA, nB, mC, nD, mE, nE: посему, естьли $mA > nB$, то $mC > nD$, и $mE > nF$, а

естьли равна, то равны, а естьли меньше, то меньше*. Слѣдственно, естьли
*опр. 3.
$mA > nB$, то $mA + mC + mE > nB + nD + nF$, а естьли равна, то равны, а естьли меньше, то меньше. Притомъ же $mA + mC + mE = m(A + C + E)$, а $nB + nD + nF = n(B + D + F)$*.
*1.
Посему величинъ A, B, $(A + C + E)$, $(B + D + F)$ кратныя mA, nB, $m(A + C + E)$, $n(B + D + F)$ имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи пропорціи*, и слѣдовательно
*опр. 3.

$$A : B :: (A + C + E) : (B + D + F).$$

XIII.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой; третья же къ четвертой имѣетъ большее отношеніе, нежели пятая къ шестой: то и первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Пусть будутъ шесть величинъ A, B, C, D, C, D такія, что $A : B :: C : D$, а $C : D > E : F$. Говорю, что $A : B > E : F$.

Поелику $C : D > E : F$; то суть какія нибудь кратныя величинъ C, E, и еще кратныя величинъ D, F, такія, что кратная первой больше кратныя второй, а крат-

ная трепьей не больше крашныя четвертой*. Пусть будутъ таковыя кратныя * опр. 4.
aC, bD, aE, bF, то есть, что $aC > bD$, но $aE \triangleright bF$. И возьми еще величинъ A, B крашныя aA, bB. И поелику $A : B :: C : D$, и взяшы крашныя aA, bB, aC, bD; посему, естьли $aA > bB$, то $aC > bD$*, или естьли $aC > bD$, * опр. 3.
то $aA > bD$, а естьли равна, то равна, а естьли меньше, то меньше. Но уже сказано, что $aC > bD$; посему $aA > bB$. И какъ $aE \triangleright bF$: слѣдственно величины A, B, E, F, коихъ крашныя aA, bB, aE, bF имѣютъ свойство предполагаемое въ опредѣленіи неравной пропорціи*, даютъ * опр. 4.

$$A : B > E : F.$$

XIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой, и первая больше третьей, то и вторая больше четвертой, а ежели равна, то равна, а ежели меньше, то меньше.

Пусть будетъ $A : B :: C : D$, и пусть, вопервыхъ, будетъ $A > C$. Говорю, что и $B > D$.

*8. Поелику $A > C$, то сравнивая сіи вели-
13. чины съ B, будетъ $A : B > C : B$. Но по положенію, $A : B :: C : D$; посему и $C : D > C : B$*.
10. А къ которой величинѣ одна и таже имѣетъ большее отношеніе, та есть меньшая: посему $D < B$, или $B > D$. Слѣдственно, естьли $A > C$, то $B > D$.

Подобно докажется, что естьли $A = C$, то $B = D$, а естьли $A < C$, то $B < D$.

XV.

Частныя величины къ своимъ равнократнымъ имѣютъ тоже отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть будутъ $A = mB$, $C = mD$, то есть
опр. 2. B, D равночастныя величинъ A, C. Говорю, что $B : D :: A : C$.

Поелику $A = mB$, а $C = mD$; то

$$A = B + B + B + \ldots\ldots m \text{ разъ},$$
$$C = D + D + D + \ldots\ldots m \text{ разъ}.$$

7. Но $B : D :: B : D :: B : D$ $:: \ldots\ldots m$ отношеній: посему $B : D :: (B + B + B + \ldots m \text{ разъ}) :$
12. $(D + D + D + \ldots m \text{ разъ})$;
или $B : D :: A : C$.

XVI.

Ежели четыре величины пропорціональны; то и премѣненіемъ будутъ пропорціональны.

Пусть будетъ A:B::C:D. Говорю, что будетъ, премѣненіемъ*, A:C::B:D. *опр. 12.

Возьми величинъ A, B равнократныя mA, mB, и величинъ C, D равнократныя nC, nD.

Итакъ, по доказанному предъ симъ будетъ A:B::mA:mB, и C:D::nC:nD*. Но *15.
A:B::C:D; посему mA:mB::nC:nD*. А изъ *11.
пропорціональныхъ величинъ, естьли первая больше третьей, то и вторая больше четвертой, а естьли равна, то равна, а естьли меньше, то меньше*: посему естьли $mA > nC$, то $mB > nD$, а естьли равна, то равна, а естьли меньше, то меньше. *14.
Слѣдовательно величинъ

A, C, B, D

кратныя mA, nC, mB, nD

имѣютъ зависимость означенную въ опре-
опр. 3. дѣленіи пропорціи; и потому будетъ

$A:C::B:D$.

XVII.

Ежели совокупленныя величины пропорціональны; то и отдѣленныя будутъ пропорціональны.

Пусть будетъ $(A+B):B::(C+D):D$. Говорю, что $A:B::C:D$.

Возьми величинъ A, B, C, D равнократныя mA, mB, mC, mD, и еще величинъ B, D равнократныя nB, nD.

Итакъ $mA+mB=m(A+B)$, $mC+mD=$
1. $m(C+D)$; а $mB+nB=(m+n)B$, $mD+nD=$
2. $(m+n)D$. И поелику $(A+B):B::(C+D):D$, и взяты кратныя $m(A+B)$, $(m+n)B$, $m(C+D)$, $(m+n)D$; посему естьли $m(A+B)>(m+n)B$, то $m(C+D)>(m+n)D$, а естьли равны, то равны, а естьли мень-
опр. 3. ше, то меньше. Пусть будетъ, вопервыхъ, $m(A+B)>(m+n)B$, то есть $mA+mB>mB+nB$: посему $mA>nB$. Но естьли

$m(A+B)>(m+n)B$, то $m(C+D)>(m+n)D$, то есть $mC + mD > mD + nD$: посему $mC > nD$. Итакъ доказано, что естьли $mA > nB$, то $mC > nD$.

Подобно докажется, что естьли $mA = nB$, то $mC = nD$, а естьли $mA < nB$, то $mC < nD$. Слѣдственно будетъ

A : B : : C : D* (*). *опр. 3.

XVIII.

Ежели величины отдѣленныя пропорціональны; то и совокупленныя будутъ пропорціональны.

Пусть будетъ (A—B) : B : : (C—D) : D. Говорю, что A : B : : C : D.

Ибо, естьли не такъ, то пусть A : B : : C : X, гдѣ X или больше, или меньше D. Пусть, вопервыхъ, будетъ меньше. Итакъ, по доказанному предъ симъ*, будетъ (A—B) : B : : *17.
(C—X) : X. А по положенію, (A—B) : B : :

(*) Естьли предполагаемая пропорція будетъ A : B : : C : D; то посему же предложенію будетъ (A—B) : B : : (C—D) : D. Причемъ явно, что величина A должна быть больше величины B.

11. $(C - D) : D$: посему $(C - X) : X : : (C - D) : D$,
или, преложенiемъ, $X : (C - X) : : D : (C - D)$*.
Но $X < D$, по положенiю; посему $(C - X) < (C - D)$: а посему еще $X > D$, что нелѣпо. Слѣдственно X не меньше D. Такъ же докажется, что и не больше: а потому $X = D$, и будетъ $A : B : : C : D$ (*).

XIX.

Ежели будетъ, какъ цѣлая величина къ цѣлой, такъ отнятая къ отнятой; то и остальная будетъ къ остальной, какъ цѣлая къ цѣлой.

Пусть будетъ $(A + B) : (C + D) : : B : D$.
Говорю, что и $A : C : : (A + B) : (C + D)$.

Поелику $(A + B) : (C + D) : : B : D$; то
16. премѣненiемъ, $(A + B) : B : : (C + D) : D$,
17. посему отдѣленiемъ, $A : B : : C : D$; а пре-
16. мѣненiемъ, $A : C : : B : D$. Но по поло-
женiю, $(A + B) : (C + D) : : B : D$; чего ради
11. $A : C : : (A + B) : (C + D)$

(*) Естьли бы предполагаемо было $A : B : : C : D$; то посему же предложенiю, будетъ $(A + B) : B : : (C + D) D$.

Слѣдствіе. Поелику изъ (A + B) : (C + D) :: B : D доказано, что (A + B) : (C + D) :: A : C; или, взявъ премѣненіемъ обѣ пропорціи*, изъ (A + B) : B :: (C + D) : D доказано, что (A + B) : A :: (C + D) : C, то есть пропорціональность чрезъ обращеніе* : посему явствуетъ, что величины пропорціональныя, и обращеніемъ суть пропорціональны.

*16.

* опр. 16.

XX.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъже отношеніи; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая будетъ больше шестой; и ежели равна, то равна, а ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ три величины A, B, C, и другія имъ равномногія D, E, F, такія, что A : B :: D : E, и B : C :: E : F. И пусть будетъ $A > C$, то говорю, что равномѣстно* $D > F$; и естьли $A = C$, то $D = F$, а естьли $A < C$, то $D < F$.

*опр 17 и 18.

Поелику $A > C$, то сравнивая сіи величины съ B, будетъ A : B > C : B*. Но A : B :: D : E;

*8.

а (пропорціи $B : C :: E : F$ преложеніемъ)
*сл: 4. *11, и 13. $C : B :: F : E$* : посему $D : E > F : E$*; а по-
10. сему $D > F$. Итакъ доказано, что естьли $A > C$, то $D > F$. Подобно докажется, что естьли $A = C$, то $D = F$, а естьли $A < C$, то $D < F$.

XXI.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи, пропорція же ихъ будетъ обратная; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая будетъ больше шестой, и ежели равна, то равна, а ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ три величины A, B, C, и другія имъ равномногія D, E, F, въ
опр. 19. обратномъ порядкѣ пропорціональныя, то есть такія, что $A : B :: E : F$ и $B : C :: D : E$. И пусть будетъ $A > C$, то говорю, что равномѣстно $D > F$; и естьли $A = C$, то $D = F$, а естьли $A < C$, то $D < F$.

Поелику $A > C$, то, сравнивая сіи ве-
8. личины съ B, будетъ $A : B > C : B$ Но $A : B :: E : F$, а (пропорціи $B : C :: D : E$

преложенiемъ) C : B : : E : D* : посему *сл: 4.
E : F > E : D*; а посему F < D, или D > F*. *11 и 13. *10.
Итакъ доказано, что естьли A > C, то D > F. Подобно докажется, что естьли A = C, то D = F, а естьли A < C, то D < F.

XXII.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ, и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по двѣ въ томъже отношенiи; то и равномѣстно будутъ въ томъже отношенiи.

Пусть будетъ сколько ниесть величинъ A, B, C, и другихъ имъ равномногихъ D, E, F, кои по двѣ по порядку суть пропорцiональны*, то есть *опр. 17.

A : B : : D : E,

B : C : : E : F,

Говорю, что A : C : : D : F.

Возьми величинъ A, D равнократныя mA, mD, и также величинъ B, E равнократныя nB, nE, и еще величинъ C, F равнократныя pC, pF.

Поелику A:B::D:E, и B:C::E:F, то будетъ $mA:nB::mD:nE$. Потому же $nB:pC::nE:pF$. Итакъ, поелику суть три величины mA,

nB, pC, и другія имъ равномногія величины mD, nE, pF, въ прямомъ порядкѣ
опр. 18. пропорціональныя: посему, изъ взятыхъ равномѣстно mA, pC, и mD, pF, естьли $mA > pC$, то $mD > pF$, а естьли равна,
20. то равна, а естьли меньше, то меньше. Но mA, pC, mD, pF суть кратныя величинъ A, C, D, F, взятыя по свойству
опр. 3. пропорціи: слѣдственно

A : C : : D : F.

XXIII.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъже отношеніи, пропорція же ихъ будетъ обратная; то и равномѣстно будутъ въ томъже отношеніи.

Пусть будутъ три величины A, B, C, и другія имъ равномногія D, E, F, кои
опр. 19. по двѣ въ обратномъ порядкѣ суть пропорціональны, то есть

A : B : : E : F,

B : C : : D : E.

Говорю, что A : C : : D : F.

Возьми величинъ A, B, D равнократныя mA, mB, mD, и еще величинъ C, E, F равнократныя nC, nE, nF. Поелику частныя величивы къ своимъ равнократнымъ имѣютъ тоже отношеніе*; то $A:B::mA:mB$, и * 15.
$E:F::nE:nF$. Но $A:B::E:F$: посему $mA:mB::nE:nF$*. * 11.
И поелику $B:C::D:E$, то $mB:nC::mD:nE$. Итакъ три величины mA, mB, nC, и другія имъ равномногія mD, nE, nF суть въ обратномъ порядкѣ пропорціональныя* посему изъ * опр. 19.
взятыхъ равномѣстно, mA, nC, и mD, nF, естьли $mA > nC$, то $mC > mF$, а естьли равна, то равна, а естьли меньше, то меньше*. Но mA, nC, mD, nF суть крат- * 21.
ныя величинъ A, C, D, F, взятыя по свойству пропорціи*: слѣдственно * опр.

$$A : C : : D : F.$$

XXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что третья къ четвертой, и также пятая ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что шестая къ четвертой: то совокупленно, первая съ пятою ко второй будетъ имѣть тоже отношеніе, что третья съ шестою къ четвертой.

Пусть будетъ шесть величинъ A, B, C, D, E, F такія что A : B : : C : D, и E : B : : F : D. Говорю, что (A + E) : B : : (C + F) : D.

опр. 13. Поелику E : B : : F : D, то преложеніемъ
сл: 4. B : E : : D : F. Но полагается A : B : : C : D; посему изъ трехъ величинъ A, B, E, и другихъ имъ равномногихъ C, D, F, кои взятыя въ прямомъ порядкѣ пропорціо-
опр. 18. нальны, будетъ равномѣстно
22. A : E : : C : F.

A естьли отдѣльно величины пропорціональны, то и совокупно будутъ про-
18. порціональны: посему

(A + E) : E : : (C + F) : F.

Но по положенію, E : B : : F : D; посему равномѣстно,

(A + E) : B : : (C + F) : D*.

XXV.

Ежели четыре величины пропорціональны, то наибольшая съ наименьшею суть больше двухъ прочихъ.

Пусть будетъ A : B : : C : D, и пусть будетъ наибольшая A, а наименьшая D. Говорю, что A + D > B + C.

Поелику $A > C$, то $B > D$*. Итакъ *14.
положи $A = C + F$, а $B = D + G$. И поелику
$A : B :: C : D$, или, что все равно, $(C + F)$:
$(D + G) :: C : D$; то будетъ $F : G :: A : B$*. *19.
Но $A > B$, посему $F > G$, а посему

$$C + D + F > C + D + G$$

но $C + F = A$, а $D + G = B$; слѣдственно

$$A + D > C + B$$

XXVI.

Ежели изъ четырехъ величинъ пропорціональныхъ будетъ первая больше второй, то и третья больше четвертой, а естьли равна, то равна, а естьли меньше, то меньше.

Пусть будетъ $A : B :: C : D$. Говорю, что естьли $A > B$, то $C > D$, а естьли $A = B$, то $C = D$, а естьли $A < B$, то $C < D$.

Возьми величинъ A, B, C, D равнократныя nA, nB, nC, nD. И вопервыхъ, пусть
будетъ $A > B$, посему $nA > nB$*. Но есть- *акс. 2.
ли $nA > nB$, то, по свойству пропорціи, $nC > nD$, ибо nA, nC, и nB, nD суть равнократныя величинъ A, C, и B, D: посему и $C > D$. Итакъ доказано, что

естьли $A > B$, то $C > D$. Подобно докажется, что естьли $A = B$, то $C = D$, а естьли $A < B$, то $C < D$.

XXVII.

Ежели изъ четырехъ величинъ первая и третья равнократны или равночастны второй и четвертой, каждая каждой; то оныя величины будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ величины A, B, C, D такія, что $A = nB$, $C = nD$. Говорю, что $A : B :: C : D$.

Возьми $E = pA$, $F = pC$, $G = qB$, $H = qD$; посему $E = p.\ nB$, $F = p.\ nD$, то есть E, F суть равнократныя величинъ B, D. Пусть будетъ, вопервыхъ, $E > G$, то $pnB > qB$; посему $pn > q$: слѣдственно $pnD > qD$, то есть $F > H$. Итакъ, естьли $E > G$, то $F > H$. Подобно докажется, что естьли $E = G$, то $F = H$, а естьли $E < G$, то $F < H$. Итакъ, поелику четырехъ величинъ A, B, C, D взятыя кратныя pA, qB, pC, qD или E, G, F, H имѣютъ свойство означенное въ пропорціи*; то будетъ $A : B :: C : D$.

* опр. 3.

Но пусть будетъ $A = \frac{B}{n}$, $C = \frac{D}{n}$, то есть A, C равночастныя величинъ B, D, посему $B = nA$, $D = nC$. Слѣдственно, по доказанному будетъ B:A::D:C, а преложеніемъ

A : B : : C : D*. *сл. 2, 4.

XXVIII.

Ежели изъ четырехъ величинъ пропорціональныхъ, первая есть кратная или частная второй, то и третья будетъ равнократная или равночастная четвертой.

Пусть будетъ A : B : : C : D, и $A = nB$. Говорю, что $C = nD$.

Возьми $E = nD$. И поелику $A = nB$; то A : B : : E : D*. Но по положенію, A : B : : C : D; *27.
посему C : D : : E : D*, а посему C = E: *11.
слѣдственно $C = nD$, ибо $E = nD$.

Но пусть будетъ $A = \frac{B}{n}$. Говорю, что $C = \frac{D}{n}$.

Поелику A : B : : C : D, то преложеніемъ, B : A : : D : C*. Но $B = nA$, ибо $A = \frac{B}{n}$: посему *сл. 2, 4.
$D = nC$, или $C = \frac{D}{n}$.

XXIX.

Отношенія, сложенныя изъ тѣхъже отношеній, суть и взаимно тѣже.

Пусть будетъ A : B : : C : D,
E : F : : G : H,
K : L : : M : N.

Говорю, что отношеніе, сложенное изъ отношеній A:B, E:F, K:L есть тожественно съ отношеніемъ, сложенымъ изъ отношеній C:D, G:H, M:N, то есть, что (A:B) + (E:F) + (K:L) :: (C:D) + (G:H) + (M:N).

Возьми какія ниесть величины O, S, и
акс. 3. пусть будетъ

A : B : : O : P, C : D : : S : T,
E : F : : P : Q, G : H : : T : V,
K : L : : Q : R, M : N : : V : X.

11. Посему O : P : : S : T,
P : Q : : T : V,
Q : R : : V : X.

Итакъ, четыре суть величины O, P, Q, R и другія имъ равномногія S, T, V, X, взятыя по двѣ въ томъже отношеніи: посему
22. равномѣстно, O : R : : S : X. Но, по опредѣ-
опр. 20. ленію сложеннаго отношенія,

$O : R :: (A : B) + (E : F) + (K : L)$,

$S : X :: (C : D) + (G : H) + (M : N)$;

слѣдственно $(A : B) + (E : F) + (K : L) ::$

$(C : D) + (G : H) + (M : N)$*. *11.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что отношенія удвоенныя тожественныхъ отношеній, или утроенныя, суть и взаимно тожественны.

XXX.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то, преложеніемъ, вторая къ первой будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели четвертая къ третьей: а ежели меньшее, то большее.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что преложеніемъ $B : A < D : C$.

Вообрази величину E, чтобы $E : B :: C : D$*. *акс. 3.
Итакъ $A : B > E : B$*; посему $A > E$: а по- *13.
сему $B : A < B : E$*. Но изъ пропорціи *8.
$E : B :: C : D$ будетъ, преложеніемъ, $B : E :: D : C$:
слѣдовательно $B : A < D : C$*. *13.

Подобно докажется, что естьли $A : B < C : D$, то будетъ $B : A > D : C$.

XXXI.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и будетъ первая равна или меньше второй; то и третья меньше четвертой.

Пусть будетъ $A:B > C:D$. И пусть, вопервыхъ, $A < B$. Говорю, что $C < D$.

акс. 3. Вообрази величину E, чтобъ $A:B::C:E$.

10. Итакъ $C:E > C:D$, посему $D > E$. Но въ пропорціи $A:B::C:E$ по положенію, $A < B$;

26. посему $C < E$. Доказано же, что $E < D$: слѣдовательно $C < D$.

Естьлиже $A = B$, то въ пропорціи $A:B::C:E$

26. будетъ $C = E$. Но $E < D$; посему $C < D$.

XXXII.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и будетъ первая равна или больше второй; то и третья больше четвертой.

Пусть будетъ $A:B < C:D$, и пусть, будетъ $A = B$, или $A > B$. Говорю $C > D$.

Поелику $A:B < C:D$, то преложеніемъ,

30. $B:A > D:C$. Но по положенію $B = A$, или $B < A$: слѣдовательно, по доказанному, $D < C$, то есть $C > D$.

XXXIII.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношенiе, нежели третья къ четвертой; то и премѣненiемъ, первая къ третьей имѣетъ большее, нежели вторая къ четвертой.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что премѣненiемъ, $A : C > B : D$.

Вообрази величину E, чтобы $E : B :: C : D$.
Итакъ $A : B > E : B$, посему $A > E$*: а по- * 10.
сему $A : C > E : C$*. Но, изъ пропорцiи * 8.
$E : B :: C : D$ премѣненiемъ, $E : C :: B : D$*; * 16.
слѣдовательно $A : C > B : D$*. * 13.

XXXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношенiе, нежели третья къ четвертой; то и совокупленiемъ, первая со второю ко второй имѣетъ большее отношенiе, нежели третья съ четвертою къ четвертой.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что совокупленiемъ, $(A + B) : B > (C + D) : D$.

Вообрази величину E, чтобъ $E : B :: C : D$.
Итакъ $A : B > E : B$, посему $A > E$*, и * 10.

8. $A+B>E+B$: а посему $(A+B):B>(E+B):B$.
Но, изъ пропорціи $E:B::C:D$, совокупле-
18. ніемъ, $(E+B):B::(C+D):D$; слѣдова-
13. тельно $(A+B):B>(C+D):D$.

XXXV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то и отдѣленіемъ, избытокъ первыя предъ второю ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели избытокъ третьей предъ четвертою къ четвертой.

Пусть будетъ $A:B>C:D$. Говорю, что отдѣленіемъ, $A-B:B>C-D:D$.

акс. 3. Вообрази величину E, чтобъ $E:B::C:D$.
13. Итакъ $A:B>E:B$, посему $A>E$, и
8. $A-B>E-B$: а посему $A-B:B>E-B:B$.
Но, изъ пропорціи $E:B::C:D$, отдѣленіемъ,
17. $E-B:B::C-D:D$; слѣдовательно
$A-B:B>C-D:D$.

XXXVI.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то обращеніемъ, первая къ избытку первыя предъ второю имѣетъ

меньшее отношеніе, нежели третья къ избытку третьей предъ четвертою.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что обращеніемъ, $A : A - B < C : C - D$.

Поелику $A : B > C : D$; то, отдѣленіемъ, $(A - B) : B > (C - D) : D$*: посему, преложеніемъ, $B : (A - B) < D : (C - D)$*: слѣдственно, совокупленіемъ, $(B + A - B) : (A - B) > (D + C - D) : (C - D)$*, то есть, $A : (A - B) > C : (C - D)$. *35. *30. *34.

XXXVII.

Ежели цѣлая величина къ цѣлой имѣетъ большее отношеніе, нежели отнятая отъ первой къ отнятой отъ второй; то и остальная къ остальной будетъ имѣть большее отношеніе, нежели цѣлая къ цѣлой.

Пусть будетъ $(A + B) : (C + D) > A : C$. Говорю, что $B : D > (A + B) : (C + D)$.

Поелику $(A + B) : (C + D) > A : C$; то премѣненіемъ, $(A + B) : A > (C + D) : C$*, посему *33. обращеніемъ, $(A + B) : (A + B - A) < (C + D) : (C + D - D)$*, то есть $(A + B) : B < (C + D) : C$; *36. слѣдственно премѣненіемъ, $(A + B) : (C + D) < B : D$, или, что все тоже, $B : D > A + B : C + D$.

XXXVIII.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, а третья къ четвертой имѣетъ большее, нежели пятая къ шестой: то и первая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Пусть будетъ $A : B > C : D$, и $C : D > E : F$. Говорю, что $A : B > E : F$.

Вообрази величину G, чтобъ $G : D :: E : F$.
13. Итакъ $C : D > G : D$, посему $C > G$. Пусть будетъ $C = G + N$. Поелику же $A : B > C : D$; то должны быть нѣкія равнократныя величинъ A, C и равнократныя величинъ B, D такія, что кратная первой больше кратныя второй, а кратная третьей не боль-
опр. 4. ше кратныя четвертой. Пусть таковыя будутъ aA, bB, aC, bD, въ коихъ $aA > bB$, а $aC \ngtr bD$: то, поелику $C = G + N$, будетъ $a(G + N) \ngtr bD$, или $aG + aN \ngtr bD$, а посему $aG \ngtr bD$. Итакъ, величинъ

A, B, G, D

кратныя aA, bB, aG, bD

имѣютъ свойство означенное въ неравной

пропорціи, и потому $A : B > G : D$. Но полагаемо было, что $G : D :: E : F$: слѣдовательно $A : B > E : F$*. *13.

XXXIX.

Ежели будетъ сколько нибудь величинъ и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по двѣ по порядку, въ большемъ отношеніи; то и равномѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ величины A, B, C и другія имъ равномногія D, E, F, кои, взятыя по двѣ по порядку, суть въ большемъ отношеніи, то есть $A : B > D : E$, и $B : C > E : F$. Говорю, что равномѣстно, $A : C > D : F$.

Вообрази величину G, чтобы $G : C :: E : F$*. *акс. 3.
Итакъ $B : C > G : C$, посему $B > G$*: а по- *10.
сему $A : G > A : B$. Полагается же, что
$A : B > D : E$; посему $A : G > D : E$*. Вообрази *38.
еще величину H, чтобы $H : G :: D : E$. Итакъ
$A : G > H : G$*, посему $A > H$: а посему *13.
$A : C > H : C$*. И поелику величины H, G, C *8.
и другія имъ равномногія D, E, F суть
таковы, что $H : G :: D : E$, и $G : C :: E : F$;
то будетъ, равномѣстно, $H : C :: D : F$*. *22.

Доказано же, что $A : C > H : C$: слѣдова-
13. тельно $A : C > D : F$.

XL.

Ежели будутъ три величины и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ обратномъ порядкѣ, въ большемъ отношеніи; то и равномѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ три величины A, B, C и другія имъ равномногія D, E, F, кои, взятыя по двѣ въ обратномъ порядкѣ, суть въ большемъ отношеніи, то есть $A:B>E:F$, и $B : C > D : E$. Говорю, что равномѣстно, $A : C > D : F$.

акс. 3. Вообрази величину G, чтобы $G : C :: D : E$.
13. Итакъ $B : C > G : C$, посему $B > G$: а по-
8. сему $A : G > A : B$. Полагается же, что
38. $A : B > E : F$, посему и $A : G > E : F$. Во-
образи еще величину H, чтобы $H : G :: E : F$.
10. Итакъ $A : G > H : G$, посему $A > H$: а по-
сему $A : C > H : C$. И поелику величины H, G, C и другія имъ равномногія D, E, F суть таковы, что $H : G :: E : F$, и $G : C :: D : E$;
23. то будетъ, равномѣстно, $H : C :: D : F$.

Доказано же, что $A:C > H:C$; слѣдовательно $A:C > D:F$*. *13.

XLI.

Ежели будетъ скольконіесть величинъ и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по двѣ по порядку, въ большемъ отношеніи: то всѣ величины перваго ряда ко всѣмъ величинамъ втораго ряда будутъ имѣть меньшее отношеніе, нежели первая къ первой, а большее, нежели послѣдняя къ послѣдней: также большее нежели всѣ перваго ряда кромѣ первой, ко всѣмъ втораго ряда кромѣ первой же.

Пусть будутъ величины A, B, C и другія имъ равномногія D, E, F, кои, взятыя по двѣ по порядку, суть въ большемъ отношеніи, то есть $A:B > D:E$, и $B:C > E:F$. Говорю, вопервыхъ, что $(A+B+C):(D+E+F) > (B+C):(E+F)$.

Поелику $B:C > E:F$, то совокупленіемъ, $(B+C):C > (E+F):F$*: посему премѣненіемъ, $(B+C):(E+F) > C:F$*. Итакъ, поелику *34. *33.
цѣлая $(B+C)$ къ цѣлой $(E+F)$ имѣетъ большее отношеніе, нежели отнятая C къ от-

нятой F, то и остальная къ остальной
будетъ имѣть большее отношеніе, нежели
37. цѣлая къ цѣлой; посему $B:E>(B+C):(E+F)$.
Но изъ $A:B>D:E$, премѣненіемъ, $A:D>B:E$,
38. посему $A:D>(B+C):(E+F)$: посему,
премѣненіемъ и совокупленіемъ, $(A+B+C)$:
33 и 34. $(B+C)>(D+E+F):(E+F)$;* и слѣдо-
вательно премѣненіемъ, $(A+B+C)$:
$(D+E+F)>(B+C):(E+F)$.

Говорю также, что $(A+B+C):(D+E+F)$
$<A:D$. Поелику, по доказанному, $(A+B+C)$:
$(D+E+F)>(B+C):(E+F)$, то есть
цѣлая къ цѣлой имѣетъ большее отноше-
ніе, нежели отнятая къ отнятой: то и
остальная къ остальной будетъ имѣть
большее отношеніе, нежели цѣлая къ цѣ-
37. лой, то есть $A:D>(A+B+C)$:
$(D+E+F)$ или, что все равно,
$(A+B+C):(D+E+F)<A:D$.

Говорю еще, что $(A+B+C):(D+E+F)$
$>C:F$. Поелику $B:C>E:F$: то, какъ и
прежде, совокупленіемъ и премѣненіемъ,
34 и 33. $(B+C):(E+F)>C:F$. Доказано же, что
$(A+B+C):(D+E+F)>(B+C):(E+F)$:
38. слѣдовательно $(A+B+C):(D+E+F)>C:F$.

XLII.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; и также пятая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели шестая къ четвертой: то и первая съ пятою ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели третья съ шестою къ четвертой.

Пусть будутъ шесть величинъ A, B, C, D, E, F, такія, что

$$A : B > C : D,$$

$$E : B > F : D.$$

Говорю, что $(A + E) : B > (C + F) : D$.

Вообрази величину G, чтобы $G : B :: C : D$*. * акс. 3.
Итакъ $A : B > G : B$*; посему $A > G$. Во- * 13.
образи еще величину H, чтобы $H : B . : F : D$; то опять будетъ $E > H$: слѣдственно $(A + E) > (G + H)$. Итакъ, поелику въ шести величинахъ G, B, C, D, H, F

$$G : B :: C : D,$$

$$H : B :: F : D;$$

то $(G + H) : B :: (C + F) : D$*. Но * 24.
$(A + E) : B > (G + H) : B$, ибо, по доказанному, $(A + E) > (G + H)$: слѣдовательно
$(A + E) : B > (C + F) : D$*. * 13.

Слѣдствіе. Ежели будетъ $A : B :: C : D$, $E : B > F : D$; то такъ же докажется, что $(A + E) : B > (C + F) : D$.

XLIII.

Ежели къ неравнымъ величинамъ прилагатся равныя или одна и таже; то большая къ меньшей будетъ имѣть большее отношеніе, нежели сложенная къ сложенной.

Пусть будутъ величины A, B, C, изъ коихъ $A > B$. Говорю, что $A:B > (A+C):(B+C)$.

8. Поелику $A > B$, то $C : B > C : A$.

Но $B : B :: A : A$;

сл: 42. посему $C + B : B > C + A : A$,

или $(C + A) : A < (C + B) : B$. А посему,

30. преложеніемъ, $A:(A+C) > B:(B+C)$; слѣдова-

33. тельно, премѣненіемъ, $A:B > (A+C):(B+C)$.

XLIV.

Отношеніе, сложенное изъ большихъ отношеній, есть больше сложеннаго изъ меньшихъ.

Пусть будетъ $A : B > C : D$,

$E : F > G : H$,

$K : L > M : N$.

Говорю, что отношеніе, сложенное изъ от-

ношеній A : B, E : F и K : L есть больше отношенія сложеннаго изъ отношеній C : D, G : H и M : N, то есть

(A:B)+(E:F)+(K:L)>(C:D)+(G:H)+(M:N).

Возьми какія ниесть величины O и S, и пусть будетъ* *акс. 3.

A : B : : O : P, C : D : : S : T,

E : F : : P : Q, G : H : : T : V,

K : L : : Q : R; M : N : : V : X.

Посему* O : P > S : T, *13.

P : Q > T : V,

Q : R > V : X.

Итакъ, четыре суть величины O, P, Q, R и другія имъ равномногія S, T, V, X, взятыя по двѣ въ большемъ отношеніи: посему равномѣстно, O : R > S : X*. Но, по *39. опредѣленію сложеннаго отношенія,

O : R : : (A : B) + (E : F) + (K : L),

S : X : : (C : D) + (G : H) + (M : N);

слѣдовательно

(A:B)+(E:F)+(K:L)>(C:D)+(G:H)+(MN)*. *11.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что отношенія удвоенныя, или утроенныя большихъ отношеній, суть больше, нежели удвоенныя или утроенныя меньшихъ.

XLV.

Ежели будутъ четыре величины непрерывно равноразнствующія, изъ коихъ первая наибольшая; то первая къ третьей имѣетъ большее отношеніе, нежели удвоенное первыя ко второй, а первая къ четвертой большее, нежели утроенное первыя же ко второй.

Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D, непрерывно равноразнствующія, изъ коихъ A наибольшая, то есть такія, что $A - B = B - C = C - D$. Говорю, вопервыхъ, что $A : C > \overline{A : B}^{2}$.

акс. 3. Вообрази величину E, чтобы $A:B::B:E$.
И поелику $A > B$; то $B > E$: посему
25. $(A + E) > 2B$; а посему $(A + E) - (B + E)$
$> 2B - (B + E)$, то есть $(A - B) > (B - E)$.
Но $(A - B) = (B - C)$: посему $(B - C) > (B - E)$;
8. слѣдственно $E > C$. Чего ради $A : C > A : E$.
Поелику же A, B, E суть непрерывно пропорціональныя, то $A : E :: \overline{A : B}^{2}$; доказано же, что $A : C > A : E$: слѣдовательно $A : C > \overline{A : B}^{2}$.

Говорю еще, что $A : D > \overline{A : B}^{3}$.

Вообрази еще величину F, чтобы $B : E :: E : F$.
Посему опять $B + F > 2E$*. По доказанному *25.
же $E > C$: посему $B + F > 2C$; а посему
$(B + F) - (C + F) > 2C - (C + F)$, то есть
$(B - C) > (C - F)$. Но $(B - C) = (C - D)$:
посему $(C - D) > (C - F)$, слѣдственно
$F > D$: чего ради $A : D > A : F$*. Поелику же *8.
A, B, E, F суть непрерывно пропорціо-
нальныя; то $A : F :: \overset{3}{\overline{A : B}}$. Доказано же, что
$A : D > A : F$: слѣдовательно $A : D > \overset{3}{\overline{A : B}}$*. *13.

КОНЕЦЪ.

Архимеда Псаммитъ

